VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE, VEKTORRENDSZER RANGJA, KOMPATIBILITÁS

1. Feladat: Határozza meg az **a)-d) feladatok**ban megadott vektorrendszerek **rang**ját !

a) feladat:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) feladat:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

c) feladat:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

d) feladat:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Feladat: Vizsgálja meg az **a)-d) feladatok**ban, hogy bizonyos vektorok előállíthatóak e más vektorok lineáris kombinációjaként !

a) feladat: Előállítható e a **d vektor** az **a**, **b** és **c vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

b) feladat: Előállíthatók e a **d** és **b vektorok** az **a** és **c vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) feladat: Előállíthatók e a **d** és **e vektorok** az **a**, **b**, **c** és **f vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

d) feladat: Előállíthatók e az **a** és **c vektorok** a **b**, **d** és **e vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Feladat: Vizsgálja meg az **a)-c) feladatok**ban, hogy bizonyos vektorok előállíthatóak e más vektorok lineáris kombinációjaként és határozza meg a megadott vektorrendszerek rangját is !

a) feladat: Előállíthatók e a **b** és **f vektorok** az **a**, **c**, **d** és **e vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ? Határozza meg az **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f vektorrendszer rang**ját is !

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) feladat: Előállíthatók e a **b** és **c vektorok** az **a**, **d** és **e vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ? Határozza meg az **a**, **b**, **c**, **d**, **e vektorrendszer rang**ját is !

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) feladat: Előállíthatók e a **c**, **e** és **f vektorok** az **a**, **b** és **d vektrok segítségével** és ha igen, akkor **milyen módon** ? Határozza meg az **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f vektorrendszer rang**ját is !

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁSOK:

1.a) feladat: **rang = 3**

1.b) feladat: **rang = 4**

1.c) feladat: **rang = 3**

1.d) feladat: **rang = 3**

2.a) feladat: $\mathbf{d} = 2\cdot\mathbf{a} - 1\cdot\mathbf{b} + 0\cdot\mathbf{c}$

2.b) feladat: sem a **d vektor**, sem a **b vektor** nem írható fel az **a** és **c vektorok** segítségével

2.c) feladat: $\mathbf{d} = -1\cdot\mathbf{a} + 3\cdot\mathbf{b} + 0\cdot\mathbf{c} + 2\cdot\mathbf{f}$ és $\mathbf{e} = 2\cdot\mathbf{a} - (1/2)\cdot\mathbf{b} + 1\cdot\mathbf{c} + (1/2)\cdot\mathbf{f}$

2.d) feladat: a **c vektor** nem írható fel a **b, d** és **e vektorok** segítségével, de $\mathbf{a} = 2\cdot\mathbf{b} + 1\cdot\mathbf{d} - 3\cdot\mathbf{e}$

3.a) feladat: a **b vektor** nem írható fel az **a, c, d** és **e vektorok** segítségével, de $\mathbf{f} = 2\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{c} + 0\cdot\mathbf{d} + 1\cdot\mathbf{e}$ és a **rang = 5**

3.b) feladat: sem a **b vektor**, sem a **c vektor** nem írható fel az **a, d** és **e vektorok** segítségével, a **rang = 4**

3.c) feladat: sem az **e vektor**, sem az **f vektor** nem írható fel az **a, b** és **d vektorok** segítségével, de $\mathbf{c} = 1\cdot\mathbf{a} - 2\cdot\mathbf{b} + 1\cdot\mathbf{d}$ és a **rang = 4**