MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEINEK ÉS SAJÁTVEKTORAINAK KISZÁMÍTÁSA

Bevezetés:

→ **Jelölés:** A mátrix **sajátérték**eit **λ_1, λ_2, λ_3,….stb.** betűkkel, míg a **különböző sajátvektorok**at **$\underline{x_1}$, $\underline{x_2}$, $\underline{x_3}$…stb.** módon jelöljük

→ **Definíció:** A mátrix sajátértéke és a hozzá tartozó sajátvektora **az a szám-vektor páros**, **amely kielégíti** az $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}$ egyenletet, azaz a **mátrix sajátvektorszorosa egyenlő** a **sajátérték sajátvektorszorosával**.

1. Definíció alkalmazásával megoldható feladatok

A **feladat** általában a megadott **mátrixban** vagy **sajátvektorban szereplő paraméterek kiszámítását** kéri a definíció felasznélásával.

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \\ \beta & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.példa: Határozzuk meg az **α** és **β paraméter**ek értékét úgy, hogy a megadott **x vektor** az **A mátrix** egyik **sajávektora legyen** !

1.LÉPÉS: A megadott adatokat behelyettesítjük az $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}$ képletbe.

→ **x** helyére a **megadott sajátvektor**, **λ** helyére a **hozzá tartozó sajátérték** kerül

→ **ha λ értékét nem ismerjük**, akkor ennek **helyére nem írunk semmit**, ismeretlen marad

→ **ha több ismeretlen λ** is van, akkor ezeket **λ_1, λ_2, λ_3,….stb.** jelöléssel **különböztetjük meg**

→ **ha több megadott sajátvektor** is van, akkor a **képletet mindegyik megadott sajátvektor esetén külön-külön** (azaz **többször**) **kell alkalmazni**

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \\ \beta & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.LÉPÉS: Elvégezzük a kijelölt műveleteket.

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \\ \beta & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot\alpha+1\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot\beta+1\cdot\alpha \\ 2\cdot\beta+1\cdot1+1\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot\lambda \\ 1\cdot\lambda \\ 1\cdot\lambda \end{bmatrix}$$

3.LÉPÉS: A **bal- és jobboldal**on álló kifejezéseket **soronként egyenlővé tesszük egymással**.

$$\begin{bmatrix} 2\cdot\alpha+1\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot\beta+1\cdot\alpha \\ 2\cdot\beta+1\cdot1+1\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot\lambda \\ 1\cdot\lambda \\ 1\cdot\lambda \end{bmatrix} \begin{array}{lcccccc} \rightarrow & 2\cdot\alpha+1\cdot1+1\cdot1 & = & 2\cdot\lambda & \rightarrow & 2\alpha+2 & = & 2\lambda \\ \rightarrow & 2\cdot1+1\cdot\beta+1\cdot\alpha & = & 1\cdot\lambda & \rightarrow & 2+\beta+\alpha & = & \lambda \\ \rightarrow & 2\cdot\beta+1\cdot1+1\cdot2 & = & 1\cdot\lambda & \rightarrow & 2\beta+3 & = & \lambda \end{array}$$

4.LÉPÉS: Megoldjuk a **3.LÉPÉS**ben **kapott egyenletrendszert**.

$$\begin{array}{lllllllllllll} 2\alpha+2 & = & 2\lambda & \rightarrow & 2\alpha+2 & = & 2\cdot(2\beta+3) & \rightarrow & 2\alpha+2 & = & 4\beta+6 & \rightarrow & 2\cdot(\beta+1)+2 = 4\beta+6 \\ 2+\beta+\alpha & = & \lambda & \rightarrow & 2+\beta+\alpha & = & 2\beta+3 & \rightarrow & \alpha & = & \beta+1 & & 2\beta+4 = 4\beta+6 \\ 2\beta+3 & = & \lambda & & & & & & & & & & \boxed{\beta = -1} \rightarrow \alpha = \beta+1 \rightarrow \boxed{\alpha = 0} \end{array}$$

2.példa: Határozzuk meg az **α,β** és **γ paraméter**ek értékét úgy, hogy a megadott **x vektor** az **A mátrix λ = -1 sajátértékéhez tartozó sajávektora legyen** !

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & 4 & \beta \\ 2 & \gamma & -1 \\ 3 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda = -1$$

1.LÉPÉS: A megadott adatokat behelyettesítjük az $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}$ képletbe.

$$\begin{bmatrix} \alpha & 4 & \beta \\ 2 & \gamma & -1 \\ 3 & \alpha & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1) * \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.LÉPÉS: Elvégezzük a kijelölt műveleteket.

$$\begin{bmatrix} \alpha & 4 & \beta \\ 2 & \gamma & -1 \\ 3 & \alpha & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot\alpha+1\cdot4+2\cdot\beta \\ \alpha\cdot2+1\cdot\gamma+2\cdot(-1) \\ \alpha\cdot3+1\cdot\alpha+2\cdot\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

3.LÉPÉS: A **bal- és jobboldal**on álló kifejezéseket **soronként egyenlővé tesszük egymással**.

$$\begin{bmatrix} \alpha\cdot\alpha+1\cdot4+2\cdot\beta \\ \alpha\cdot2+1\cdot\gamma+2\cdot(-1) \\ \alpha\cdot3+1\cdot\alpha+2\cdot\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1) \end{bmatrix} \begin{array}{lcccccc} \rightarrow & \alpha\cdot\alpha+1\cdot4+2\cdot\beta & = & \alpha\cdot(-1) & \rightarrow & \alpha^2+2\beta+4 & = & -\alpha \\ \rightarrow & \alpha\cdot2+1\cdot\gamma+2\cdot(-1) & = & 1\cdot(-1) & \rightarrow & 2\alpha+\gamma-2 & = & -1 \\ \rightarrow & \alpha\cdot3+1\cdot\alpha+2\cdot\beta & = & 2\cdot(-1) & \rightarrow & 4\alpha+2\beta & = & -2 \end{array}$$

4.LÉPÉS: Megoldjuk a **3.LÉPÉS**ben **kapott egyenletrendszert**.

$$\begin{array}{lllllllllllll} \alpha^2+2\beta+4 & = & -\alpha & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \alpha^2+2\cdot(-2\alpha-1)+4 & = & -\alpha & \rightarrow & \alpha^2-3\alpha+2 = 0 & \rightarrow & \boxed{\alpha_1=1 \text{ és } \alpha_2=2} \\ 2\alpha+\gamma-2 & = & -1 & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & 2\alpha+\gamma-2 & = & -1 & \rightarrow & \gamma = 1-2\alpha & \rightarrow & \gamma = 1-2\alpha \rightarrow \boxed{\gamma_1=1 \text{ és } \gamma_2=2} \\ 4\alpha+2\beta & = & -2 & \rightarrow & \beta = -2\alpha-1 & & & & & & & & \beta = -2\alpha-1 \rightarrow \boxed{\beta_1=-3 \text{ és } \beta_2=-5} \end{array}$$

2. Sajátértékekkel kapcsolatos ismeretek

2a. Mátrix sajátértékeinek kiszámítása

A mátrix **sajátérték**einek **kiszámítása** a következő lépések alapján történik:

1.példa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

1.LÉPÉS: A mátrix **főátlójának minden eleméből levonunk λ-t.**

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ -8 & 0-\lambda & 4 \\ 12 & 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

2.LÉPÉS: Kiszámítjuk a kapott mátrix determinánsát (lásd „**Determinánsok kiszámítása és tulajdonságai**” **című fejezet**et).

Mivel a mátrix az **1.példában 3x3-as**, a determinánst **Sarrus szabállyal számítjuk.**

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -12\lambda & 24(6-\lambda) & -8(2-\lambda) \\ 6-\lambda & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & \\ -8 & -\lambda & 4 & -8 & -\lambda & \\ 12 & 6 & 2-\lambda & 12 & 6 & \\ & & & (6-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) & 48 & -48 \end{array}$$

det = $((6-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)+48+(-48)) - (-12\lambda+24(6-\lambda)+(-8(2-\lambda))) = (6-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - (-12\lambda+144-24\lambda-16+8\lambda) = (-\lambda^3+8\lambda^2-12\lambda) - (128-28\lambda) = -\lambda^3+8\lambda^2-12\lambda-128+28\lambda = -\lambda^3+8\lambda^2+16\lambda-128$

3.LÉPÉS: A **2.LÉPÉS**ben kapott **determinánst nullával tesszük egyenlővé**.

A példa adataival: $-\lambda^3+8\lambda^2+16\lambda-128 = 0$

4.LÉPÉS: Megoldjuk a **3.LÉPÉS**ben **kapott egyenletet**, ekkor eredményül a mátrix **sajátértékeit kapjuk**.

$-\lambda^3+8\lambda^2+16\lambda-128 = 0$ → **szorzattá alakítunk** → $-\lambda^2(\lambda-8)+16(\lambda-8) = 0 \rightarrow (\lambda-8)(16-\lambda^2) = 0 \rightarrow (\lambda-8) = 0$ **vagy** $(16-\lambda^2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 8$ **vagy** $\lambda_2 = 4$ **vagy** $\lambda_3 = -4$

Az **1.példában** megadott mátrixnak tehát **három különböző sajátérték**e van.

2.példa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a **2.példában** megadott mátrix sajátértékeit az **1-4.LÉPÉS**ek végrehajtásával:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & & & (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 1 & -1 & 3-\lambda & 1 & \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda & \\ -1 & -1 & 3-\lambda & -1 & -1 & \\ & & & (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) & 0 & 0 \end{array}$$

det = $((3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+0+0) - ((2-\lambda)+0+0) = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9-1) = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) = 0 \rightarrow (2-\lambda) = 0$ **vagy** $(\lambda^2-6\lambda+8) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2$ **vagy** $\lambda_2 = 2$ **vagy** $\lambda_3 = 4$ → **mivel ez tulajdonképpen csak két különböző sajátérték** → $\lambda_1 = 2$ **vagy** $\lambda_2 = 4$ (a $\lambda=2$ **sajátérték**et **többszörös sajátérték**nek nevezzük, mert a megoldás során ezt többször is megkaptuk)

A **2.példában** megadott mátrixnak tehát **két különböző sajátérték**e van.

Megjegyzés: Egy „*n*” sort tartalmazó mátrixnak (*n*x*n*-es mátrix) legfeljebb „*n*” darab különböző sajátértéke lehet.

2b. A sajátértékek tulajdonságai

1.szabály: Ha egy mátrix **determinánsa** **nulla**, akkor **legalább egy sajátértéke** is **nulla**. Az állítás **megfordítható**, azaz ha egy mátrix **sajátértékeinek** egyike **nulla**, akkor a mátrix **determinánsa** is **nulla** (Ekkor a mátrix **szinguláris**, a **rangja** biztosan **kisebb** a **rendjénél**, azaz **nem létezik invrze**).

2.szabály: **Diagonális mátrix** (olyan mátrix, amelyben a **főátlón kívüli összes elem nulla**) **sajátértékei** a **diagonális elemek**.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 = -2 \end{matrix}$$

3.szabály: Ha egy mátrixnak **létezik inverze** (azaz **egyetlen sajátértéke sem nulla**), akkor az **inverz mátrix sajátértékei** éppen a **mátrix sajátértékeinek reciprokai** (Ha az **A mátrix sajátértéke λ**, akkor az **inverzének**, $\underline{A}^{-1}$ **mátrixnak a sajátértéke 1/λ**).

Példa: Ha egy **A mátrix sajátéréke λ = 2**, akkor az **invezének**, az $\underline{A}^{-1}$ **mátrixnak a sajátértéke 1/λ = 1/2**

4.szabály: Ha egy mátrix **összes elemét tetszőleges α számmal szorozzuk**, akkor a mátrix **sajátértékei α-szorosára** változnak (Ha az **A mátrix sajátértéke λ**, akkor **α-szorosának, α*A mátrixnak a sajátértéke α*λ**).

Példa: Ha egy **A mátrix sajátéréke λ = 2**, akkor a **3-szorosának** a **3*A mátrixnak a sajátértéke 3*λ = 3*2 = 6**

5.szabály: Ha egy mátrixot **k-adik hatványra emelünk**, akkor a **sajátértékei is k-adik hatványra emelkednek** (Ha az **A mátrix sajátértéke λ**, akkor **k-adik hatványának**, $\underline{A}^k$ **mátrixnak a sajátértéke** λ^k).

Példa: Ha egy **A mátrix sajátéréke λ = 2**, akkor a **3-adik hatványának**, az $\underline{A}^3$ **mátrixnak a sajátértéke** $\lambda^3 = 2^3 = 8$

6.szabály: Ha egy mátrix **főátlójának** **minden eleméhez ugyanazt a számot adjuk hozzá** (azaz a mátrixhoz **hozzáadjuk** a mátrixszal azonos méretű **egységmátrix α-szorosát**), akkor a **kapott mátrix** (**A + αI mátrix**) **sajátértékei** az A mátrix sajátértékeinél **α-val nagyobbak** (ha α negatív, akkor kisebbek).

Példa: Adjunk hozzá az **A** mátrix **főátlójának** **minden eleméhez α-t**, ekkor:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}+\alpha\underline{I} = \underline{B} = \begin{bmatrix} 6+\alpha & 1 & 1 \\ -8 & 0+\alpha & 4 \\ 12 & 6 & 2+\alpha \end{bmatrix}$$

Sajátérték: λ **Sajátérték: λ+α**

7.szabály: Ha **3-6.szabályok** **alapján előállított mátrixokat adunk össze**, akkor a **sajátértékek** is **összeadódnak** (Ha az **A mátrix sajátértéke λ**, akkor az $\alpha*\underline{A}^k + \beta*\underline{A}^{-1} + \gamma\underline{I}$ **mátrix sajátértéke** $\alpha*\lambda^k + \beta*(1/\lambda) + \gamma$)

Példa: Ha egy **A mátrix sajátéréke λ = 2**, akkor a $3*\underline{A}^3 + 4*\underline{A}^{-1} + 5*\underline{I}$ **mátrix sajátértéke** $3*\lambda^3 + 4*(1/\lambda) + 5 = 3*2^3 + 4*(1/2) + 5 = 31$

3. Sajátvektorokkal kapcsolatos ismeretek

3a. Mátrix sajátvektorainak kiszámítása

A mátrix **sajátvektorainak** **kiszámításához** **ismernünk kell a sajátértékeket**, ezért **először ezeket** **kell meghatároznunk**.

1.példa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a **sajátértékeit már korábban kiszámítottuk**. A **három különböző sajátérték**: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -4$

Miután a sajátértékek rendelkezésre állnak, a **sajátvektorok kiszámítása** a következő lépések alapján történik:

1.LÉPÉS: **Kiválasztjuk** a kiszámított **sajátértékek közül az egyiket**. A példában válasszuk az első sajátértéket: $\lambda_1 = 8$.

2.LÉPÉS: A mátrix **főátlójának** **minden eleméből** **levonjuk** az **1.LÉPÉSben** kiválasztott **sajátértéket**.

$$\begin{bmatrix} 6-8 & 1 & 1 \\ -8 & 0-8 & 4 \\ 12 & 6 & 2-8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -8 & -8 & 4 \\ 12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

3.LÉPÉS: **Induló táblázat**ot készítünk a következő szempontok figyelembevételével:

	x-ek	*b*
bázis	2.LÉPÉSben kapott mátrix	0

a példában szereplő adatokkal pedig:

	x_1	x_2	x_3	*b*
	-2	1	1	0
	-8	-8	4	0
	12	6	-6	0

→ a **táblázat tetejére** először **annyi** *x*-et írunk (***x_1, x_2, x_3…stb.***), **amennyi** a vizsgált **mátrix sorainak száma** (a példában a mátrixnak 3 sora van, tehát ***x_1, x_2, x_3***) , majd a **legfelső sor végére** mindig ***b*** betűt írunk (függőleges vonallal elválasztva az ***x***-ektől**)**.

→ a táblázatba az ***x***-ek alá bemásoljuk a **2.LÉPÉS végrehajtása után kapott mátrix**ot, a táblázat jobb szélére a ***b*** **alá minden** egyes **sorba nullát írunk**.

→ Az induló táblázatban a **bázis** egyelőre **üres**, azaz a táblázat egyes **sorainak elejére semmit nem írunk**

4.LÉPÉS: Bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre az induló táblázattól kezdődően addig, amíg olyan táblázatot nem kapunk, amelyben már nem tudunk generáló elemet választani. (A lépések azonosak a **„Lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval”** című fejezet **„1.Paramétert nem tartalmazó eset”** című alfejezet **2A-2E.LÉPÉS**ében leírtakkal, a részletes levezetés és magyarázat ott olvasható)

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudunk generáló elemet választani az alábbi:

	x_1	x_2	x_3	*b*
	-2	$\boxed{1}$	1	0
	-8	-8	4	0
	12	6	-6	0

	x_1	x_3	*b*
x_2	-2	1	0
	-24	12	0
	24	$\boxed{-12}$	0

	x_1	*b*
x_2	0	0
	0	0
x_3	-2	0

5. LÉPÉS: Az **utolsó táblázat**ról **leolvassuk** a feladat megoldását, azaz az **ismeretlenek** (***x_1, x_2, x_3…stb.)*** **értékeit**. (A lépések azonosak a **„Lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval”** című fejezet **„1.Paramétert nem tartalmazó eset”** című alfejezet **4.LÉPÉS/1.eset**nél szereplő **4A-4E.LÉPÉS**ekben leírtakkal, a részletes levezetés és magyarázat ott olvasható)

	x_1	*b*
x_2	0	0
	0	0
x_3	-2	0

$$\rightarrow \begin{array}{c|c|c} & x_1 & b \\ \hline x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0x_1 \\ 0 - (-2)x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0x_1 \\ x_3 = 2x_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_2 = 0x_1 \\ x_3 = 2x_1 \end{array} \xrightarrow{x_1=\alpha} \begin{array}{l} x_2 = 0\alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{array} \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha \\ 0\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. LÉPÉS: Értékelés: Az **5.LÉPÉSben kapott vektor** nem más, mint az **1.LÉPÉSben** **kiválasztott sajátérték**hez tartozó **sajátvektor**. A vektor előtti **paraméteres szorzószám**ot (**α, β, γ…stb**) egyelőre figyelmen kívül hagyhatjuk. Ha az **5.LÉPÉS**ben kapott eredményben **több paraméter** (**α, β, γ…stb**) is található, akkor az **1.LÉPÉS**ben **kiválasztott sajátérték**hez **több különböző sajátvektor** is tartozik (**annyi sajátvektor, ahány paramétert** tartalmaz az **5.LÉPÉS** eredménye).

Az **x=(1;0;2)** **vektor** a **λ=8** **sajátérték**hez tartozó **sajátvektor**. (Mivel az **5.LÉPÉS** eredménye csak egyetlen paramétert **α**-t tartalmaz, a **λ=8 sajátértékhez** csak ez az **egyetlen sajátvektor tartozik**)

7. LÉPÉS: Az **1-6.LÉPÉS**eket **megismételjük** a különböző **sajátértékekkel külön-külön**. (A példában az **1-6.LÉPÉS**eket még kétszer kell megismételnünk, mert a **λ=8** sajátértéken kívül még két másik sajátérték is van, mégpedig **λ=4** és **λ=-4**)

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 6-4 & 1 & 1 \\ -8 & 0-4 & 4 \\ 12 & 6 & 2-4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & 4 \\ 12 & 6 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	*b*
	2	$\boxed{1}$	1	0
	-8	-4	4	0
	12	6	-2	0

	x_1	x_3	*b*
x_2	2	1	0
	0	8	0
	0	$\boxed{-8}$	0

	x_1	*b*
x_2	2	0
	0	0
x_3	0	0

	x_1	*b*
x_2	2	0
	0	0
x_3	0	0

$$\rightarrow \begin{array}{c|c|c} & x_1 & b \\ \hline x_2 & 2 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 2x_1 \\ 0 - 0x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0x_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0x_1 \end{array} \xrightarrow{x_1=\alpha} \begin{array}{l} x_2 = -2\alpha \\ x_3 = 0\alpha \end{array} \rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha \\ -2\alpha \\ 0\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az **x=(1;-2;0)** **vektor** a **λ=4** **sajátérték**hez tartozó **sajátvektor**.

$$\lambda_3 = -4 \rightarrow \begin{bmatrix} 6-(-4) & 1 & 1 \\ -8 & 0-(-4) & 4 \\ 12 & 6 & 2-(-4) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 4 \\ 12 & 6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 10 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ & -8 & 4 & 4 & 0 \\ & 12 & 6 & 6 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & 10 & 1 & 0 \\ & -48 & 0 & 0 \\ & \boxed{-48} & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1x_3 \\ 0x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1x_3 \\ 0 - 0x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = -1x_3 \\ x_1 = 0x_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} x_2 = -1x_3 \\ x_1 = 0x_3 \end{matrix} \quad x_3=\alpha \rightarrow \begin{matrix} x_2 = -1\alpha \\ x_1 = 0\alpha \end{matrix} \rightarrow \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\alpha \\ -1\alpha \\ 1\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az **__x=(0;-1;1)__ vektor** a __λ=-4__ **sajátérték**hez tartozó **sajátvektor**.

__2.példa__

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a **__sajátértékeit már korábban kiszámítottuk__**. A **két különböző sajátérték: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$.**

A **sajátvektorok kiszámítása** az **__1-7.LÉPÉS__**ek végrehajtásával a következőképp történik:

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1x_1 & -1x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1x_1 - (-1)x_3 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = -1x_1 + 1x_3 \rightarrow$$

$$x_2 = -1\alpha + 1\beta \quad x_1=\alpha \text{ és } x_3=\beta \rightarrow \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha \\ -1\alpha + 1\beta \\ 1\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha + 0\beta \\ -1\alpha + 1\beta \\ 0\alpha + 1\beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az **__x=(1;-1;0)__ vektor** és az **__x=(0;1;1)__ vektor** a __λ=2__ **sajátérték**hez tartozó **sajátvektorok**. (Mivel az **__5.LÉPÉS__** eredménye két paramétert **α**-t és **β**-t tartalmaz, a **λ=2 sajátértékhez két sajátvektor tartozik**)

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & 1 & -1 \\ 0 & 2-4 & 0 \\ -1 & -1 & 3-4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & -1 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ & 0 & -2 & 0 & 0 \\ & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & -1 & -1 & 0 \\ & -2 & -2 & 0 \\ & \boxed{-2} & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_3 & b \\ \hline x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0x_3 \\ 1x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0x_3 \\ 0 - 1x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0x_3 \\ x_1 = -1x_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} x_2 = 0x_3 \\ x_1 = -1x_3 \end{matrix} \quad x_3=\alpha \rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0\alpha \\ x_1 = -1\alpha \end{matrix} \rightarrow \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\alpha \\ 0\alpha \\ 1\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az **__x=(-1;0;1)__ vektor** a __λ=4__ **sajátérték**hez tartozó **sajátvektor**.

Összefoglalva az 1. és 2.példa eredményeit:

	Sajátérték	Sajátértékhez tartozó sajátvektor	Értelmezés
1.példa	$\lambda_1 = 8$	$\underline{x}$=(1;0;2)	A mátrixnak **három különböző sajátértéke** és **három különböző sajátvektora** van
	$\lambda_2 = 4$	$\underline{x}$=(1;-2;0)	
	$\lambda_3 = -4$	$\underline{x}$=(0;-1;1)	
2.példa	$\lambda_1 = 2$	$\underline{x}$=(1;-1;0)	A mátrixnak **két különböző sajátértéke** és **három különböző sajátvektora** van
		$\underline{x}$=(0;1;1)	
	$\lambda_2 = 4$	$\underline{x}$=(-1;0;1)	

3b. A sajátvektorok tulajdonságai

1.szabály: Egy **sajátvektor tetszőleges számszorosa** (**nullaszoros nem lehet!**) **is sajátvektor** lesz, mégpedig **ugyanahhoz a sajtértékhez tartozó** (tehát **nem különböző**) **sajátvektor**. (Ha $\underline{x}$ **sajátvektor**, akkor $\alpha\underline{x}$ is **sajátvektor**, de $\alpha\neq0$)

Példa: Az $\underline{x}$**=(1;0;2)** vektor a **λ=8 sajátértékhez tartozó sajátvektor** (**1.példa**), így az $\alpha\underline{x}$**=(1α;0α;2α)** vektor is a **λ=8 sajátértékhez tartozó sajátvektor** lesz (ahol **α∈R\{0}**)

2.szabály: Ha **egy sajátértékhez több különböző sajátvektor tartozik**, akkor **ezek tetszőleges lineáris kombinációja is sajátvektor** lesz, mégpedig **ugyanahhoz a sajtértékhez tartozó** (tehát **nem különböző**) **sajátvektor**. (Ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ és $\underline{z}$ vektorok **sajátvektorok**, akkor $\alpha\underline{x}+\beta\underline{y}+\gamma\underline{z}$ is **sajátvektor**, de $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq0$, azaz **α, β, γ egyszerre nem lehet nulla**)

Példa: Az $\underline{x}$**=(1;-1;0)** és az $\underline{y}$**=(0;1;1)** vektorok a **λ=2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok** (**2.példa**), így az $\alpha\underline{x}+\beta\underline{y}$**=(1α;-1α;0α)+(0β;1β;1β)=(1α+0β;-1α+1β;0α+1β)=(α;-α+β;β)** vektor is a **λ=8 sajátértékhez tartozó sajátvektor** lesz (ahol $\alpha^2+\beta^2\neq0$)

4. Mátrix diagonalizációja

1.szabály: Egy ***nxn***-es („*n*" sort tartalmazó) mátrix csak **akkor diagonalizálható, ha létezik „*n*" darab különböző** (**lineárisan független**) **sajátvektor**a.

2.szabály: Ha egy ***nxn***-es mátrixnak **„*n*" darab különböző sajátértéke van**, akkor biztosan **létezik „*n*" darab különböző** (**lineárisan független**) **sajátvektor**a is, tehát **diagonalizálható**.

3.szabály: Ha egy mátrix **diagonalizálható**, akkor **teljesül a következő** összefüggés: $\underline{P}^{-1}*\underline{A}*\underline{P}=\underline{D}$.

→ Az $\underline{A}$ **mátrix** a **megadott mátrix**

→ A $\underline{P}$ **mátrix oszlopai** az $\underline{A}$ **mátrix különböző sajátvektorai** vagy ezek tetszőleges (nem nulla!) számszorosai

→ A $\underline{P}^{-1}$ **mátrix** a $\underline{P}$ **mátrix inverze**

→ A $\underline{D}$ **mátrix** olyan ***nxn***-es **diagonális mátrix**, melynek **főátlójában** találhatóak az $\underline{A}$ **mátrix sajátértékei**

4a. Mátrix diagonalizálhatóságának eldöntése

Állapítsuk meg, hogy az **1.példában** és a **2.példában** megadott mátrixok **diagonalizálhatóak e** !

1.példa $\qquad$ **2.példa**

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}6&1&1\\-8&0&4\\12&6&2\end{bmatrix}\qquad \underline{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

1.LÉPÉS: Kiszámítjuk a mátrix **sajátérték**eit (lásd **„2a. Mátrix sajátértékeinek kiszámítása"** című fejezetet).

1.példában szereplő **mátrix sajátértékei**: $\lambda_1 = 8$ **és** $\lambda_2 = 4$ **és** $\lambda_3 = -4$

2.példában szereplő **mátrix sajátértékei**: $\lambda_1 = 2$ **és** $\lambda_2 = 4$

2.LÉPÉS: Megnézzük, hogy a mátrixnak **hány különböző sajátérték**e van.

1.eset: a mátrixnak **„*n*" darab különböző sajátérték**e van (ahol **„*n*"** a mátrix **sorainak száma**).

Értékelés: A mátrix **diagonalizálható** (további számítás csak akkor szükséges, ha mást is kérdez a feladat).

Az **1.példában** szereplő mátrix esetén ***n* = 3** és a **különböző sajátértékek száma is 3**, tehát **diagonalizálható**.

2.eset: a mátrixnak nincs **„*n*" darab különböző sajátérték**e (ahol **„*n*"** a mátrix **sorainak száma**).

Értékelés: A mátrix **lehet**, hogy **diagonalizálható** (ennek eldöntéséhez **ki kell számítani a sajátvektorokat** is), a **3.LÉPÉS következik**.

A **2.példában** szereplő mátrix esetén ***n* = 3**, de a **különböző sajátértékek száma csak 2**, tehát **következik** a **3.LÉPÉS**.

3.LÉPÉS: Kiszámítjuk a mátrix **sajátvektor**ait (lásd **„3a. Mátrix sajátvektorainak kiszámítása"** című fejezetet).

Ha a feladatban **csak a diagonalizálhatóságról kell döntenünk** (**mást nem kérdez**) és a **diagonalizálhatóság** már a **2.LÉPÉS**ben **kiderült** (lásd **2.LÉPÉS/1.eset**), akkor **nem kell sajátvektorokat számítani**.

2.példában szereplő **mátrix sajátektorai**: $\underline{x_1}$**=(1;-1;0) és** $\underline{x_2}$**=(0;1;1) és** $\underline{x_3}$**=(-1;0;1)**

4.LÉPÉS: Megnézzük, hogy a mátrixnak **hány különböző sajátvektor**a van.

1.eset: a mátrixnak **„*n*" darab különböző sajátvektor**a van (ahol **„*n*"** a mátrix **sorainak száma**).

Értékelés: A mátrix **diagonalizálható** (további számítás csak akkor szükséges, ha mást is kérdez a feladat).

Az **2.példában** szereplő mátrix esetén ***n* = 3** és a **különböző sajátvektorok száma is 3**, tehát **diagonalizálható**.

2.eset: a mátrixnak nincs **„*n*" darab különböző sajátvektor**a (ahol **„*n*"** a mátrix **sorainak száma**).

Értékelés: A mátrix **nem diagonalizálható** (további számításokra nincs szükség).

4b. Mátrix diagonalizált alakjának megadása

Határozzuk meg az **1.példában** és a **2.példában** megadott mátrixok esetén a **D** , **P** és **P^{-1} mátrixok**at !

1.példa $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1.LÉPÉS: **Eldöntjük**, hogy a megadott mátrix **diagonalizálható e** (lásd **„4a. Mátrix diagonalizálhatóságának eldöntése"** című fejezetet). **Ha** a mátrix **nem diagonalizálható**, akkor további teendő nincs a **feladatmegoldás itt befejeződik**.

Az **1.példában** és a **2.példában** megadott mindkét mátrix **diagonalizálható**.

2.LÉPÉS: Meghatározzuk a **D mátrix**ot, melynek jellemzői:

→ Az **A mátrix**szal **azonos méretű** (a példában ***3x3*-as**)

→ A **főátló**ban az **A mátrix sajátértékei** szerepelnek **tetszőleges sorrendben** (a **többszörös sajátérték**et **többször kell szerepeltetni**)

1.példában szereplő **mátrix sajátértékei**: $\lambda_1 = 8$ **és** $\lambda_2 = 4$ **és** $\lambda_3 = -4$

2.példában szereplő **mátrix sajátértékei**: $\boxed{\lambda_1 = 2}$ (ez **2-szeres sajátérték**, tehát **2-szer kell szerepeltetni**) **és** $\lambda_2 = 4$

→ Mivel **diagonális mátrix**, a **főátlón kívüli összes elem nulla**

1.példa $\underline{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3.LÉPÉS: Meghatározzuk a **P mátrix**ot, melynek jellemzői:

→ Az **A mátrix**szal **azonos méretű** (a példában ***3x3*-as**)

→ **Oszlopai** az **A mátrix sajátvektorai** (a **sajátvektor tetszőleges számszorosa is lehet**, de nullaszorosa nem)

1.példában szereplő **mátrix sajátvektorai**: **$\underline{x_1}$=(1;0;2)** **és** **$\underline{x_2}$=(1;-2;0)** **és** **$\underline{x_3}$=(0;-1;1)**

2.példában szereplő **mátrix sajátvektorai**: **$\underline{x_1}$=(1;-1;0)** **és** **$\underline{x_2}$=(0;1;1)** **és** **$\underline{x_3}$=(-1;0;1)**

→ A **P mátrixban olyan sorrendben kell szerepeltetni a sajátvektorokat, amilyen sorrendben szerepelnek** a hozzájuk tartozó **sajátértékek a D mátrixban.** Ha a **D mátrix** főátlójában szereplő **sajátértékek sorrendjét megváltoztatjuk**, akkor **ugyanilyen módon kell változtatni** a **P mátrix**ban a **sajátvektorok sorrendjét (az összetartozó sajátérték-sajátvektor párokat azonos szín jelöli)**

1.példa $\underline{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

1.példa $\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.LÉPÉS: Meghatározzuk a **P^{-1} mátrix**ot, amely nem más, mint a **P mátrix inverze**. (a számítás lépései azonosak a **„Mátrix rangja és inverze"** című fejezet **„2. Mátrix inverzének meghatározása"** című alfejezetében leírtakkal)

1.példa $\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.példa $\underline{P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ **2.példa** $\underline{P^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

4c. Mátrixok hatványozása a diagonalizált alak felhasználásával

Határozzuk meg az **1.példában** és a **2.példában** megadott mátrixok **5. hatvány**át, az $\mathbf{A}^5$ **mátrix**ot !

1.példa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

2.példa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.LÉPÉS: Meghatározzuk a **D** , **P** és $\mathbf{P}^{-1}$ **mátrixok**at (lásd **„4b. Mátrix diagonalizát alakjának megadása”** című alfejezetet).

1.példa:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.példa:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.LÉPÉS: Meghatározzuk a **D** **mátrix** annyiadik **hatványát**, ahányadik hatványra kell emelnünk az **A** **mátrix**ot. Diagonális mátrixot úgy hatványozunk, hogy a **főátló minden elemét** a **megfelelő hatványra emeljük**.

1.példa

$$\underline{D}^5 = \begin{bmatrix} 8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 4^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^5 \end{bmatrix}$$

2.példa

$$\underline{D}^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix}$$

3.LÉPÉS: Behelyettesítünk az $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}*\mathbf{D}^k*\mathbf{P}^{-1}$ képletbe. (A példában **k = 5**).

1.példa:

$$\underline{A}^5 = \underline{P}*\underline{D}^5*\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 4^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.példa:

$$\underline{A}^5 = \underline{P}*\underline{D}^5*\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.LÉPÉS: Elvégezzük a mátrixok szorzását.

			8^5	0	0	1/2	1/4	1/4
1.példa			0	4^5	0	1/2	-1/4	-1/4
			0	0	-4^5	-1	-1/2	1/2
1	1	0	8^5	4^5	0	**16896**	**7936**	**7936**
0	-2	-1	0	$-2\cdot4^5$	4^5	**-2048**	**0**	**1024**
2	0	1	$2\cdot8^5$	0	-4^5	**33792**	**16896**	**15872**

			2^5	0	0	1/2	-1/2	1/2
2.példa			0	2^5	0	1/2	1/2	1/2
			0	0	4^5	-1/2	-1/2	1/2
1	0	-1	2^5	0	-4^5	**528**	**496**	**-496**
-1	1	0	-2^5	2^5	0	**0**	**32**	**0**
0	1	1	0	2^5	4^5	**-496**	**-496**	**528**

1.példa

$$\underline{A}^5 = \begin{bmatrix} 16896 & 7936 & 7936 \\ -2048 & 0 & 1024 \\ 33792 & 16896 & 15872 \end{bmatrix}$$

2.példa

$$\underline{A}^5 = \begin{bmatrix} 528 & 496 & -496 \\ 0 & 32 & 0 \\ -496 & -496 & 528 \end{bmatrix}$$