MÁTRIXOK DETERMINÁNSÁNAK KISZÁMÍTÁSA ÉS A DETERMINÁNSOK TULAJDONSÁGAI

Bevezetés:

→ **Determináns:** A **mátrixhoz tartozó**, meghatározott módszerrel kiszámított **egyetlen számadat**

→ **Jelölés:** |**A**| vagy det**A**

→ **Szabály:** determináns **kizárólag** a **négyzetes mátrix**ok esetén számítható (olyan mátrixok, ahol a **sorok száma azonos az oszlopok számával**), **egyéb mátrixok esetén nincs értelme**

→ **Kiszámítás:** a számítás módszerét a mártix mérete határozza meg. **2x2-es mátrix** esetén az **1.módszer**t, **3x3-as mátrix** esetén **elsősorban** a **2.módszer**t (de **alkalmazható a 3.módszer is**), míg **ennél nagyobb mátrix**ok esetén **kizárólag** a **3.módszer**t alkalmazzuk.

1. Determinánsok kiszámításának módszerei

1.módszer: 2x2-es mátrixok esetén a számítás a következő:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A **főátlóban elhelyezkedő elemek** **szorzatából** **levonjuk** a **mellékátlóban szereplő elemek** **szorzatát**

A példa adataival: det**A** = 4*3 – 1*(-2) = **14**

2.módszer (Sarrus szabály): 3x3-as mátrixok esetén a számítás lépései a következők:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.LÉPÉS: A mátrix **első két oszlop**át **leírjuk** mégegyszer a **mátrix mögé**.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{array}$$

2.LÉPÉS: A mátrix **bal felső eleméből kiinduló főátlójában lévő elemeket összeszorozzuk**, majd az **eredmény**t leírjuk a **főátló alá**.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ & & & 9 & \end{array}$$

A példa adataival: 1*3*3 = **9**

3.LÉPÉS: A **2.LÉPÉS**t **megismételjük** a mátrix **első sor**ában elhelyezkedő **második** és **harmadik** **elemből kiinduló főátlók**kal is.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & \\ & & & 9 & 4 & -8 \end{array}$$

A példa adataival: **2***1*2 = **4** és (-2)*(-2)*(-2) = **-8**

4.LÉPÉS: A mátrix **bal alsó eleméből kiinduló mellékátlójában lévő elemeket összeszorozzuk**, majd az **eredmény**t leírjuk a **mellékátló fölé**.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -12 & & \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & \\ & & & 9 & 4 & -8 \end{array}$$

A példa adataival: 2*3*(-2) = **-12**

5.LÉPÉS: A **4.LÉPÉS**t **megismételjük** a mátrix **harmadik sor**ában elhelyezkedő **második** és **harmadik** **elemből kiinduló mellékátlók**kal is.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -12 & -2 & -12 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & \\ & & & 9 & 4 & -8 \end{array}$$

A példa adataival: (-2)*1*1 = **-2** és (3)*(-2)*(2) = **-12**

6.LÉPÉS: A **2-3.LÉPÉS**ben kapott **számok** **összegéből** **levonjuk** a **4-5.LÉPÉS**ben kapott **számok** összegét.

$$\begin{array}{ccc} & & -12 \quad -2 \quad -12 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{matrix} & \\ & & 9 \quad 4 \quad -8 \end{array}$$

A példa adataival: det**A** = (**9** + **4** + (**-8**)) – (**-12** + (**-2**) + (**-12**)) = **5** – (**-26**) = **31**

3.módszer (Aldeterminánsok szerinti kifejtés): a korábbinál **nagyobb mátrix**ok esetén ezt a módszert használjuk. Ennek a módszernek két **változat**a lehetséges. Az **1.változat** **mechanikus**abb, de **több számítás**t igényel, míg a **2.változat** lényegesen **rövidebb**, de ötletet (trükköt) igényel.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.változat: a **mechanikus**, **több számítás**t igénylő változat lépései a következők:

1.LÉPÉS: Kiválasztjuk a mátrix egy **tetszőleges sor**át vagy **oszlop**át. **Célszerű** a **legtöbb nullát tartalmazó sor**t vagy **oszlop**ot választani (Ha nincs egyetlen nulla sem a mátrixban, akkor mindegy, melyiket választjuk).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A fenti **példában válasszuk** a **második oszlop**ot, mert ebben **van egy nulla** (választhatnánk a **negyedik sort is**).

2.LÉPÉS: Az **1.LÉPÉS**ben **kiválasztott sor** vagy **oszlop** **összes nullától különböző eleméhez** **előjeles aldeterminánst** számítunk. (A **példában 3 db előjeles aldeterminánst** fogunk számítani, mert az **1.LÉPÉS**ben kiválasztott oszlopban **3 db nullától különböző elem** található: **2**, **-2**, **1**) Ennek lépései **egy adott elem esetén** a következők:

2A.LÉPÉS: Kiválasztjuk az **1.LÉPÉS** oszlopának vagy sorának **első nullától különböző elemét**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2B.LÉPÉS: A **2A.LÉPÉSben kiválasztott elem** **teljes sorát és teljes oszlopát töröljük** a mátrixból (beleértve a **kiválasztott elemet is**).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2C.LÉPÉS: Kiszámítjuk a **2B.LÉPÉS**t követően **megmaradt** (az eredetinél eggyel kevesebb sort és eggyel kevesebb oszlopot tartalmazó) **mátrix** **determináns**át az **1-2-3.módszer** szerint.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{A megmaradt mátrix:} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a **példában a megmaradt mátrix 3x3-as**, ennek **determináns**át a **2.módszer** (**Sarrus szabály**) szerint számíthatjuk.

$$\begin{array}{ccc} & & 6 \quad -2 \quad -1 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} & \\ & & 6 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

A **megmaradt mátrix determinánsa** példa adataival: (6 + 1 + 2) – (6 + (-2) + (-1)) = **9 – 3 = 6**

2D.LÉPÉS: A **2C.LÉPÉS**ben **kapott determináns**t **beszorozzuk** **$(-1)^{i+j}$**-vel, ahol **i** = **ahányadik sort** a **2B.LÉPÉS**ben **elhagytuk** az eredeti mátrixból, míg **j** = **ahányadik oszlopot** a **2B.LÉPÉS**ben **elhagytuk** az eredeti mátrixból (A példában **i = 1**, mert az **első sort hagytuk el** és **j = 2**, mert a **második oszlopot**).

A példa adataival: **6***$(-1)^{1+2}$ = **6***$(-1)^3$ = **6***(-1) = **-6**

A kapott eredmény nem más, mint a **2A.LÉPÉS**ben **kiválasztott elemhez tartozó előjeles aldetermináns** értéke.

2E.LÉPÉS: A **2A-2D.LÉPÉS**eket megismételjük az **1.LÉPÉS**ben kiválasztott sor vagy oszlop **mindegyik nullától különböző elemével** külön-külön.

Megismételve a **2A-2D.LÉPÉS**eket az **1.LÉPÉS**ben **kiválasztott oszlop második nullától különböző elemével**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{cccccc} & & & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & \\ & & & 3 & 1 & -1 \end{array}$$

$(3 + 1 + (-1)) – ((-3) + (-1) + (-1)) = 3 – (-5) = 8 \rightarrow 8*(-1)^{2+2} = 8*(-1)^4 = 8*(1) = 8$

Megismételve a **2A-2D.LÉPÉS**eket az **1.LÉPÉS**ben **kiválasztott oszlop harmadik nullától különböző elemével**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{cccccc} & & & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & \\ & & & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$(1 + 2 + 2) – ((-1) + (-2) + 2) = 5 – (-1) = 6 \rightarrow 6*(-1)^{3+2} = 6*(-1)^5 = 6*(-1) = -6$

Összefoglalva a **2.LÉPÉS**ben kapott eredményeket:

1A.LÉPÉSben kiválasztott oszlop (sor) nullától különböző elemei	**2**	**-2**	**1**
2.LÉPÉSben kiszámított előjeles aldeterminánsok értéke	**-6**	**8**	**-6**

3.LÉPÉS: Az **1.LÉPÉS**ben kiválasztott oszlop (sor) **nullától különböző elemeit** **beszorozzuk** a hozzájuk tartozó (**2.LÉPÉS**ben kapott) **előjeles aldeterminánsokkal**, majd a **kapott eredményeket összeadjuk**.

A példa adataival: **2*(-6) + (-2)*8 + 1*(-6) = -34**

A **kapott eredmény** nem más, mint az **eredeti mátrix determinánsa**, melyet ki akartunk számítani (a példában **detA=-34**)

2.változat: a **rövidebb**, **kevesebb számítás**t (de **ötletet**) igénylő változat lépései a következők:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.LÉPÉS: **Elemi sor és oszlopműveletek**kel elérjük, hogy a mátrixnak **legyen olyan sora vagy oszlopa**, amelyben **legfeljebb egy nullától különböző elem** található (**ha** a megadott mátrixnak **van olyan sora** vagy **oszlopa**, **amelyben** csak **egyetlen nullától különböző elem** található, akkor az **1.LÉPÉS**re **nincs szükség**, a megoldást a **2.LÉPÉS**sel **kezdjük**).

1A.LÉPÉS: **Kiválasztjuk** azt a **sort vagy oszlopot**, amelyikben a **legtöbb nulla** található (ha több ilyen van vagy egyáltalán nincsen nulla, akkor a választás tetszőleges).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A fenti **példában válasszuk** a **második oszlop**ot, mert ebben **van egy nulla** (választhatnánk a **negyedik sort is,** mert **ebben is egy nulla van**, egynél több nulla pedig egyetlen sorban vagy oszlopban sincsen).

1B.LÉPÉS: **Kiválasztunk** a mátrixból **két olyan sor**t vagy **oszlop**ot (**ha** az **1A.LÉPÉS**ben **oszlopot választottunk**, akkor az **1B.LÉPÉS**ben **már sorokat kell**, **ha** viszont **korábban sort választottunk**, akkor **most oszlopokat kell**), melyekben az **1A.LÉPÉSben megjelölt sorral/oszloppal történő kereszteződés helyén** **mindenütt nullától különböző** szám áll.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A fenti **példában válasszuk** az **első és a harmadik sor**t (mindenképp sort kell, mert az **1A.LÉPÉS**ben oszlopot választottunk).

1C.LÉPÉS: Az **1B.LÉPÉSben kiválasztott** sorok/oszlopok közül az **egyikben** (a választás tetszőleges, legyen most a 3.sor) **mindegyik számadatot szorozzuk α-val** (**csak fejben**, de nem írjuk le!!), majd az **így kapott sort/oszlopot hozzáadjuk** az **1B.LÉPÉSben kiválasztott másik sor/oszlop** számadataihoz. A kapott **új mátrixban** **mindegyik sor/oszlop változatlan marad**, **kivéve** azt az **1B.LÉPÉSben kiválasztott sort/oszlopot, amihez hozzáadtunk** (a pédában ez az 1.sor).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{Fejben} \\ -1\alpha,\ 1\alpha,\ 3\alpha,\ 1\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+(-1\alpha) & 2+1\alpha & 1+3\alpha & -1+1\alpha \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\alpha & 2+\alpha & 1+3\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1D.LÉPÉS: Az **1C.LÉPÉS után kapott mátrix 1A.LÉPÉSben kiválasztott soában/oszlopában** lévő **α-t tartalmazó adatot nullával tesszük egyenlővé** és **meghatározzuk** az **α** értékét.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & 2+\alpha & 1+3\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A példában **$2+\alpha=0$**, amelyből **$\alpha=-2$**

1E.LÉPÉS: Az **1D.LÉPÉS**ben kapott **α értéket** (**a példában $\alpha=-2$**) **behelyettesítjük** az **1C.LÉPÉS** után kapott mátrixba az **összes α helyére**.

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 2+(-2) & 1+3*(-2) & (-2)-1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az **1A-1E.LÉPÉS**ek végrehajtása után az **1A.LÉPÉSben kiválasztott oszlopban megjelent még egy nulla**, tehát már két nullát tartalmaz az oszlop, azaz **a lépésekkel sikerült a mátrixban a nullák számát növelni**.

1F.LÉPÉS: A kapott új mátrixból kiindulva az **1A-1E.LÉPÉS**eket **megismételjük mindaddig**, amíg a **mátrixnak lesz egy olyan sora/oszlopa**, **melyben legfeljebb egy nullától különböző elem** szerepel.

1A.LÉPÉS → **1B.LÉPÉS** → **1C.LÉPÉS** → **1C.LÉPÉS Fejben**

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1\alpha, & 1\alpha, & 3\alpha, & 1\alpha \end{bmatrix} \rightarrow$$

1C.LÉPÉS → **1D.LÉPÉS** → **1E.LÉPÉS**

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2+(-1\alpha) & -2+1\alpha & 1+3\alpha & 2+1\alpha \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & 1+3\alpha & 2+\alpha \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha-2=0 \rightarrow \alpha=2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a legutolsó mátrix második oszlopában egyetlen elem kivételével az összes elem nulla, a 2.LÉPÉS következik.

2.LÉPÉS: A mátrixnak **azzal a sorával/oszlopával foglalkozunk**, melyben **egyetlen elem kivételével az összes többi elem nulla**.

2A.LÉPÉS: Kiválasztjuk a sor vagy oszlop **egyetlen nullától különböző elemét**.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2B.LÉPÉS: A **2A.LÉPÉSben kiválasztott elem teljes sorát és teljes oszlopát töröljük** a mátrixból (beleértve a **kiválasztott elemet is**).

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2C.LÉPÉS: Kiszámítjuk a **2B.LÉPÉS**t követően **megmaradt** (az eredetinél eggyel kevesebb sort és eggyel kevesebb oszlopot tartalmazó) **mátrix determinán**sát az **1-2-3.módszer** szerint.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{A megmaradt mátrix:} \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a **példában a megmaradt mátrix 3x3-as**, ennek **determinán**sát a **2.módszer** (**Sarrus szabály**) szerint számíthatjuk.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & -21 & -12 \quad 0 \\ 3 & -5 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & 21 & -20 \quad 0 \end{array}$$

A **megmaradt mátrix determinánsa** példa adataival: **(21 + (-20) + 0) – ((-21) + (-12) + 0) = 1 – (-33) = 34**

2D.LÉPÉS: A **2C.LÉPÉS**ben **kapott determinánst beszorozzuk** $(-1)^{i+j}$-vel, ahol **i** = **ahányadik sort** a **2B.LÉPÉS**ben **elhagytuk** az eredeti mátrixból, míg **j** = **ahányadik oszlopot** a **2B.LÉPÉS**ben **elhagytuk** az eredeti mátrixból (A példában **i = 3**, mert a **harmadik sort hagytuk el** és **j = 2**, mert a **második oszlopot**).

A példa adataival: $\mathbf{34}*(-1)^{3+2} = \mathbf{34}*(-1)^5 = \mathbf{34}*(-1) = \mathbf{-34}$

A kapott eredmény nem más, mint a **2A.LÉPÉS**ben **kiválasztott elemhez tartozó előjeles aldetermináns** értéke.

3.LÉPÉS: A **2A.LÉPÉS**ben **kiválasztott elemet** **beszorozzuk** a hozzá tartozó (**2.LÉPÉS**ben kapott) **előjeles aldeterminánssal**.

A példa adataival: $\mathbf{1}*(\mathbf{-34}) = \mathbf{-34}$

A **kapott eredmény** nem más, mint az **eredeti mátrix determinánsa**, melyet ki akartunk számítani (a példában **detA=-34**)

2. Determinánsok tulajdonságai

1.szabály: Ha egy mátrix **egy sora vagy egy oszlopa csak nulla elemeket tartalmaz**, akkor a **determináns is nulla**.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det\underline{A} = 0$$

2.szabály: Az **egységmátrix** (a **főátlóban csak 1-es**, **minden egyéb elem nulla**) **determinánsa 1**.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det\underline{I} = 1$$

3.szabály: **Diagonális mátrix** (olyan mátrix, amelyben a **főátlón kívüli összes elem nulla**) **determinánsa** egyenlő a **diagonális elemek szorzatá**val.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det\underline{A} = 2*(-1)*3*(-2) = 12$$

4.szabály: Ha egy mátrix **egyik sora egy másik sor számszorosa** (vagy **egyik oszlopa egy másik oszlop számszorosa**), akkor a **determinánsa nulla**.

Példa: A a **3.oszlop** éppen az **1.oszlop** 2-szerese

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det\underline{A} = 0$$

5.szabály: Ha egy mátrix **egyik sorához hozzáadjuk egy másik sor számszorosát** (vagy **egyik oszlopához adjuk hozzá egy másik oszlop számszorosát**), akkor a **determináns** értéke **nem változik**.

Példa: Adjuk hozzá az **1.sorhoz a 3.sor (α)-szorosát (α=tetszőleges szám)**

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \textbf{Fejben} \\ (-1\alpha, 1\alpha, 3\alpha, 1\alpha) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+(-1\alpha) & 2+1\alpha & 1+3\alpha & -1+1\alpha \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 2+\alpha & 1+3\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\qquad$ $\det\underline{B}=\det\underline{A}=-34$

6.szabály: Ha egy mátrix **két sorát** egymással **felcseréljük** (vagy **két oszlopát cseréljük fel** egymással), akkor a **determináns értéke -1-szeres**ére változik.

Példa: Cseréljük fel a mátrix **első** és **harmadik** sorát.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\qquad$ $\det\underline{B}=-1*\det\underline{A}=-1*(-34)=34$

7.szabály: Ha egy mátrixnak **létezik inverze** (azaz a **determináns**a **nem nulla**), akkor az **inverz mátrix determinánsa** éppen a **mátrix determinánsának reciproka**. Képlettel: $\det\underline{A}^{-1} = 1/\det\underline{A}$

8.szabály: Ha egy mátrix egy **tetszőleges sorában** (vagy egy **tetszőleges oszlopában**) **mindegyik elemet ugynazzal az α számmal szorzunk**, akkor a mátrix **determinánsa is α-szorosára** változik.

Példa: Szorozzuk be a mátrix **negyedik oszlop**ának elemeit egy tetszőleges számmal (**α**-val)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1\alpha \\ 2 & -2 & 1 & 2\alpha \\ 1 & 2 & 1 & -1\alpha \\ 1 & 0 & -1 & 1\alpha \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\det\underline{B}=\alpha*\det\underline{A}=\alpha*(-34)=-34\alpha$

9.szabály: Ha egy mátrix **összes elemét tetszőleges α számmal szorozzuk**, akkor a mátrix **determinánsa α^n-szeresére** változik (**n = a mátrix sorainak száma**). Képlettel: $\det(\alpha\underline{A})=\alpha^n(\det\underline{A})$

Példa: Szorozzuk be a mátrix **minden elem**ét egy tetszőleges számmal (**α**-val). A mátrixnak **4 sora** van, ezért **n=4**.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} -1\alpha & 1\alpha & 3\alpha & 1\alpha \\ 2\alpha & -2\alpha & 1\alpha & 2\alpha \\ 1\alpha & 2\alpha & 1\alpha & -1\alpha \\ 1\alpha & 0\alpha & -1\alpha & 1\alpha \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\det\underline{B}=\alpha^n(\det\underline{A})=\alpha^4*(-34)=-34\alpha^4$

10.szabály: Ha egy mátrixot **k-adik hatványra emelünk**, akkor a **determinánsa is k-adik hatványra emelkedik**. Képlettel: $\det(\underline{A}^k)=(\det\underline{A})^k$

Példa: Emeljük a mátrixot az **ötödik hatvány**ra (Ekkor a **determináns** is az **ötödik hatvány**ra emelkedik).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}^5 = \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 32 & 1 & -1 \\ 32 & -32 & 1 & 32 \\ -1 & 1 & 243 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\det\underline{B}=\det\underline{A}^5=(\det\underline{A})^5=(-34)^5=(-34)^5$

11.szabály: Két mátrix **szorzat**ának **determinánsa** egyenlő **determinánsaik szorzatá**val (a szorzás **csak akkor értelmezhető**, ha **mindkét mátrix mérete azonos**). Képlettel: $\det(\underline{A}*\underline{B})=(\det\underline{A})*(\det\underline{B})$

Példa: Szorozzuk össze az **A** és **B** mátrixokat, ekkor a determinánsaik is szorzódnak.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}*\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & 7 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det\underline{A}=-34$ $\det\underline{B}=-6$ $\det(\underline{A}*\underline{B})=(\det\underline{A})*(\det\underline{B})=(-34)*(-6)=204$

12.szabály: Ha egy mátrix egy **tetszőleges sorában/oszlopában** szereplő **összes elemet két tetszőleges szám összegeként írunk fel**, a következő szabályt használhatjuk:

Példa: **Bontsuk szét** a mátrix **harmadik oszlop**ában szereplő elemeket **két tetszőleges szám összegére**, majd **állítsunk elő két új mátrixot** az alábbi módon:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1=2+(-1) & -1 \\ 2 & -2 & 1=3+(-2) & 2 \\ -1 & 1 & 3=1+2 & 1 \\ 1 & 0 & -1=(-3)+2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2+(-1) & -1 \\ 2 & -2 & 3+(-2) & 2 \\ -1 & 1 & 1+2 & 1 \\ 1 & 0 & (-3)+2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A **determinánsok közötti kapcsolat** ilyenkor a következő: $\det\underline{A}=(\det\underline{B})+(\det\underline{C})$

13.szabály: Két mátrix **összegének determinánsa** **NEM EGYENLŐ** **determinánsaik összegével**. Képlettel: $\det(\underline{A}+\underline{B})\neq(\det\underline{A})+(\det\underline{B})$