# LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL

## 1. Paramétert nem tartalmazó eset

**1.Példa**: Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & -4 \end{array}$$

**Megjegyzés:** Ebben a példában az ismeretleneket $x_1, x_2, x_3$ jelöli, de $x_1, x_2, x_3$ helyett állhatna $x, y, z$ is

**Fogalmak:**

→ **együtthatómátrix:** az egyenletek baloldalán szereplő, az **ismeretlenek** ($x_1, x_2, x_3$) **szorzószámai** (előjellel együtt!!) alkotta mátrix (ahol a szám nincs kiírva az *x* elé, ott 1-es vagy -1-es szerepel, ahol nincsen *x*, ott 0 szerepel a mátrixban), melyet általában **A betű**vel jelölünk

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

→ ***b* vektor:** az egyenletek **jobboldalán álló számok** alkotta oszlopvektor

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

→ ***x* vektor:** a feladatban szereplő ismeretlenek alkotta oszlopvektor (annyi db $x_i$, ahány db szerepel a feladatban, a példában $x_1$, $x_2$, $x_3$)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer általános alakja **Ax = b**

**1.LÉPÉS: Induló szimplex táblázat**ot készítünk az alábbiak figyelembevételével:

| | *x* vektor | *b* |
|---|---|---|
| bázis | együttható mátrix | b |

**a példában szereplő adatokkal pedig:**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *b* |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 |
| | 3 | 1 | -4 | -4 |

→ a táblázat tetejére először felírjuk az ***x* vektor**t, majd a legfelső sor végére mindig ***b*** betűt írunk (függőleges vonallal elválasztva az ***x* vektor**tól)

→ a táblázatba az ***x* vektor** alá bemásoljuk az **együtthatómátrix** számadatait, a táblázat jobb szélére a ***b*** alá bemásoljuk a ***b* vektor** számadatait

→ Az induló táblázatban a **bázis** egyelőre **üres**, azaz a táblázat egyes **sorainak elejére semmit nem írunk**

**2. LÉPÉS:** Bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre az induló táblázattól kezdődően addig, amíg olyan táblázatot nem kapunk, amelyben már nem tudunk generáló elemet választani. (A bázistranszformáció menete azonos a **„Bázistranszformáció" című fejezet**ben a **paramétert nem tartalmazó eset**nél leírtakkal, de a generáló elem választásánál lehetnek kiegészítések)

**2A.LÉPÉS:** Generáló elemet választunk az alábbi szabályok betartásával:

→ **b oszlopból TILOS generáló elemet választani**

→ **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázis üres**, azaz ahol a bázisban még nincs „betű" (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)

→ a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1.LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

→ bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert egyik sor elején sincsen még a bázisban vektor

→ bármelyik számot választhatjuk (hiszen egyik szám sem nulla), de **CÉLSZERŰ** valamelyik **1-es**t választani

A példában választásunk legyen a **következő**:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *b* |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 |

**2B.LÉPÉS:** A **generáló elem oszlopának tetején lévő „betűt"** bevisszük a bázisba a **generáló elem sorának elején lévő üres hely**re, majd új táblázatot készítünk. A **bázisba bekerülő „betű"**nek megfelelő oszlop az **új táblázatban** már **hiányzik**, azaz a példában az új táblázatban az $x_2$ oszlop **eltűnik**.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | | | |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | | | |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 | $x_2$ | | | |

**2C.LÉPÉS:** Kiszámítjuk az **új táblázatban** azokat a számokat, amelyek a **generáló elemnek megfelelő sor**ban helyezkednek el. A számítást úgy végezzük, hogy a **generáló elem sorában lévő számok**at (**az előző táblázatban**) **elosztjuk** a **generáló elem**mel.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | | | |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | | | |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 | $x_2$ | 3/1=3 | -4/1=-4 | -4/1=-4 |

**2D.LÉPÉS:** Kitöltjük az **új táblázatban szereplő üres oszlopok**at megpedig **oszloponként haladva balról jobb felé**. Mindegyik ilyen oszlopban már van egy **ismert szám**adat, melyet a **2C.LÉPÉS**ben töltöttünk ki.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | | | |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | | | |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

→ **2D/1.LÉPÉS:** Megnézzük, vannak e olyan oszlopok, amelyekben a **már kitöltött (ismert) szám** **nulla**. Ha vannak ilyen oszlopok, akkor először ezeket töltjük ki, ha nincsenek ilyenek, akkor az **2D/2.LÉPÉS** következik. Minden **ilyen oszlop** **összes számadat**a **megegyezik** az **előző táblázatban szereplő azonos betűjelű oszlop** számadataival, tehát csak **át kell másolnunk a megfelelő oszlopot az előző táblázatból**. (jelen példában nincsen ilyen oszlop, ezért folytatjuk a **2D/2.LÉPÉS**–sel)

→ **2D/2.LÉPÉS:** A még hiányzó oszlopok kitöltése (oszloponként haladva) mindig a következő képlet alkalmazásával történik:

**(új oszlop ismeretlen számadatai) = (új oszloppal azonos betűjelű oszlop számadatai az előző táblázatban a generáló elem sorában lévő számadat nélkül)-(új oszlop ismert számadata)*(a generáló elem oszlopa az előző táblázatban a generáló elem nélkül)**

**(1,-2) – (3)*(3,-5) = (1,-2) – (9,-15) = (-8,13)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | | | | | -8 | | |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | | | | | 13 | | |
| | 3 | 1 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

**(-2,4) – (-4)*( 3,-5) = (-2,4) – (-12,20) = (10,-16)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | -8 | | | | -8 | 10 | |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | 13 | | | | 13 | -16 | |
| | 3 | 1 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

**(2,0) – (-4)*( 3,-5) = (2,0) – (-12,20) = (14,-20)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | -8 | 10 | | | -8 | 10 | 14 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | 13 | -16 | | | 13 | -16 | -20 |
| | 3 | 1 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

**2A-2D.LÉPÉSEK** elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 | | -8 | 10 | 14 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 | | 13 | -16 | -20 |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 | $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

**2E.LÉPÉS:** A kapott új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy ismét végrehajtjuk a **2A-2D.LÉPÉSEK**-et addig, ameddig a **2A. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2A**, **2B**, **2C**, **2D**):

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | -8 | 10 | 14 |
| | 13 | -16 | -20 |
| $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_3$ | -8/10 | 14/10 |
| | 2/10 | 24/10 |
| $x_2$ | -2/10 | 16/10 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | -8 | $\boxed{10}$ | 14 |
| | 13 | -16 | -20 |
| $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_3$ | -8/10 | 14/10 |
| | 2/10 | 24/10 |
| $x_2$ | -2/10 | 16/10 |

| | $b$ |
|---|---|
| $x_3$ | 11 |
| $x_1$ | 12 |
| $x_2$ | 4 |

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -2 | 2 |
| | -2 | -5 | 4 | 0 |
| | 3 | $\boxed{1}$ | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | -8 | $\boxed{10}$ | 14 |
| | 13 | -16 | -20 |
| $x_2$ | 3 | -4 | -4 |

| | $x_1$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_3$ | -8/10 | 14/10 |
| | $\boxed{2/10}$ | 24/10 |
| $x_2$ | -2/10 | 16/10 |

| | $b$ |
|---|---|
| $x_3$ | 11 |
| $x_1$ | 12 |
| $x_2$ | 4 |

**2.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + x_4 &= -3 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 2 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 | 1 | -3 |
| | 0 | -1 | 1 | 2 | 1 |

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 2 |
| | 2 | -1 | -1 | -5 |
| | -1 | $\boxed{1}$ | 2 | 1 |

| | $x_2$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 |
| | $\boxed{1}$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | -1 | 2 | 1 |

| | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -1 | 5 |
| $x_2$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | 3 | -3 |

**3.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | -3 | 1 | -1 | -3 | -3 |
| | $\boxed{1}$ | 1 | 3 | -3 | 5 |
| | 0 | 1 | 2 | -3 | 3 |

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 8 | -12 | 12 |
| $x_1$ | 1 | 3 | -3 | 5 |
| | $\boxed{1}$ | 2 | -3 | 3 |

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

**4.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= -10 \\ -3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | -5 | 3 | 3 | -10 |
| | 0 | -3 | $\boxed{1}$ | 3 | 2 |
| | 1 | -4 | 2 | 3 | 5 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | -6 | -16 |
| $x_3$ | 0 | -3 | 3 | 2 |
| | $\boxed{1}$ | 2 | -3 | 1 |

| | $x_2$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | -18 |
| $x_3$ | -3 | 3 | 2 |
| $x_1$ | 2 | -3 | 1 |

Ha eljutunk az utolsó táblázathoz, azaz már nem tudunk újabb generáló elemet választani, akkor folytatjuk a feladatmegoldást a **3.LÉPÉS**sel

**3. LÉPÉS:** Megnézzük az **utolsó táblázat**ot, amelyen már nem tudtunk generáló elemet választani. Ezt a táblázatot besoroljuk a következő esetek valamelyikébe (az utolsó táblázat az alábbi **négy eset közül csak az egyikbe sorolható be!!!**).

**1.eset:** Az összes ismeretlen (összex $x$) a **bázis**ban van, a **bázisban** már **nincsen üres hely**, a **bázison kívül** (táblázat tetején) nincsen ismeretlen (nincsen $x$), csak a $b$ szerepel itt. Az **1.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $b$ |
|---|---|
| $x_3$ | 11 |
| $x_1$ | 12 |
| $x_2$ | 4 |

**következtetés:** Az egyenletrendszernek **egyetlen megoldás**a **van**, azaz a megoldás egyértelmű.

**2.eset:** A **bázisban** már **nincsen üres hely**, a **bázison kívül** (táblázat tetején) viszont marad ismeretlen (van ***x***), nemcsak a ***b*** szerepel itt. A **2.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|
| $x_1$ | -1 | 5 |
| $x_2$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | 3 | -3 |

**következtetés:** Az egyenletrendszernek **végtelen megoldás**a **van**.

**3.eset:** A **bázisban** még **van üres hely**, a **bázison kívül** (táblázat tetején) marad ismeretlen (van ***x***), nemcsak a ***b*** szerepel itt, ugyanekkor a ***b*** oszlopban **nulla áll az összes olyan helyen, ahol a bázis üres** (azaz a sor elején nincsen ***x***). A **3.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

**következtetés:** Az egyenletrendszernek **végtelen megoldás**a **van**.

**4.eset:** A **bázisban** még **van üres hely**, a **bázison kívül** (táblázat tetején) marad ismeretlen (van ***x***), nemcsak a ***b*** szerepel itt, ugyanekkor a ***b*** oszlopban **van olyan hely, ahol nem nulla áll abban a sorban, ahol a bázis üres** (azaz a sor elején nincsen ***x***). A **4.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_2$ | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | -18 |
| $x_3$ | -3 | 3 | 2 |
| $x_1$ | 2 | -3 | 1 |

**következtetés:** Az egyenletrendszernek **nincs megoldás**a.

Ha besoroltuk az utolsó táblázatot az előbbi esetkek egyikébe, akkor **folytatjuk** a feladatmegoldást a **4.LÉPÉS**sel, **kivéve** azt az esetet (**4.eset**), ahol nincsen megoldás, mert **ezesetben a feladatmegoldás itt végetér**.

**4. LÉPÉS:** Az **utolsó táblázat**ról leolvassuk a feladat megoldását, azaz az ismeretlenek (***$x_1$, $x_2$, $x_3$)*** értékeit. A leolvasás menete attól függ, hogy az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél melyik esethez tartozott, ennek alapján itt két eset lehetséges.

**1.eset:** Az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél az **1.eset**hez tartozott. Az **1.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

Ilyenkor minden egyes ismeretlen (***x***) értéke a ***b*** **oszlopban** található, mégpedig **pontosan az adott ismeretlen mellett**.

| | ***b*** |
|---|---|
| $x_3$ | 11 |
| $x_1$ | 12 |
| $x_2$ | 4 |

**Tehát a megoldás:** $x_3 = 11$, $x_1 = 12$, $x_2 = 4$, amelyet ***x*** **vektor** formájában is felírhatunk, melyben az ***x***-ek **sorrendben** szerepelnek (**legfelül az $x_1$** és így tovább).

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

**2.eset:** Az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél a **2.eset**hez vagy a **3.eset**hez tartozott. A **2.példa** és a **3.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

Ilyenkor a megoldást a következő lépések segítségével kapjuk meg az utolsó táblázatról kiindulva:

**4A.LÉPÉS:** Az utolsó táblázatból **elhagyjuk** azokat a **sorokat**, amelyekben az **összes szám nulla**. (A **2.példában** ilyen sorunk **nincsen**, a **3.példában** viszont ilyen az **első sor**)

**2.példa:** **Nincs teendő**, az utolsó táblázat **változatlan marad**

| | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|
| $x_1$ | -1 | 5 |
| $x_2$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | 3 | -3 |

**3.példa:** Az **első sor**ban az **összes szám nulla**, ezért ezt a sort **elhagyjuk**

| | $x_3$ | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

**Az első sort elhagyva kapjuk:**

| | $x_3$ | $x_4$ | ***b*** |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

**Fogalmak:**

→ **Kötött ismeretlenek**nek nevezzük a táblázat bal szélén (a **bázisban**) található **ismeretlenek**et (*x*-eket)

→ **Szabad ismeretlenek**nek nevezzük a táblázat tetején (a **bázison kívül**) található **ismeretlenek**et (*x*-eket)

**2.példa:**

| | $x_4$ | **b** |
|---|---|---|
| $x_1$ | -1 | 5 |
| $x_2$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | 3 | -3 |

**3.példa:**

| | $x_3$ | $x_4$ | **b** |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

→ **Szabad ismeretlenek száma** az egyenletrendszer **szabadságfok**a (a **2.példában** a **szabadságfok 1**, míg a **3.példában 2**)

**4B.LÉPÉS:** A kapott táblázatban szereplő számokat behelyettesítjük a következő képletbe:

**(kötött ismeretlenek oszlopvektora) = (b oszlopban szereplő számok) – (szabad ismeretlenek alatt elhelyezkedő mátrix)*(szabad ismeretlenek oszlop formájában felírva)**

**2.példa:**

| | $x_4$ | **b** |
|---|---|---|
| $x_1$ | -1 | 5 |
| $x_2$ | 1 | -4 |
| $x_3$ | 3 | -3 |

**A képletet alkalmazva:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_4 \end{bmatrix}$$

**3.példa:**

| | $x_3$ | $x_4$ | **b** |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | -3 | 3 |

**A képletet alkalmazva:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

**4C.LÉPÉS:** A felírt egyenletek jobboldalán elvégezzük a mátrix- és vektorműveleteket

**2.példa:**

**Elvégezve a szorzást:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1x_4 \\ 1x_4 \\ 3x_4 \end{bmatrix}$$

**Majd elvégezve a kivonást:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 1x_4 \\ -4 - 1x_4 \\ -3 - 3x_4 \end{bmatrix}$$

**3.példa:**

**Elvégezve a szorzást:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1x_3 + 0x_4 \\ 2x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}$$

**Majd elvégezve a kivonást**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1x_3 - 0x_4 \\ 3 - 2x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}$$

**4D.LÉPÉS:** A bal- és jobboldalt soronként egyenlővé tesszük egymással, ekkor az egyenletrendszer **általános megoldás**át kapjuk

**2.példa:**

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 1x_4 \\ x_2 &= -4 - 1x_4 \\ x_3 &= -3 - 3x_4 \end{aligned}$$

**3.példa:**

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 1x_3 \\ x_2 &= 3 - 2x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

**Megjegyzés:** Attól függően, hogy a bázistranszformáció során hogyan választottunk generáló elemet, más megoldást is kaphatunk. Ekkor mások a szabad ismeretlenek és mások a kötött ismeretlenek, de a szabadságfok (azaz a szabad ismeretlenek száma ugyanennyi)

**4E.LÉPÉS:** A **szabad ismeretlenek helyére α, β, γ**… stb. **paraméterek**et írunk. Mivel ezek szabad ismeretlenek, a **paraméterek értéke tetszőleges szám lehet**, ezért **α, β, γ…€ R**.

**2.példa:**

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 1x_4 \\ x_2 &= -4 - 1x_4 \\ x_3 &= -3 - 3x_4 \end{aligned}$$

**$x_4$ szabad ismeretlen helyére α paraméter kerül, tehát $x_4$ = α**

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 1\alpha \\ x_2 &= -4 - 1\alpha \\ x_3 &= -3 - 3\alpha \end{aligned}$$

**Tehát a megoldás:** $x_4 = \alpha$, $x_1 = 5 + \alpha$, $x_2 = -4 - \alpha$, $x_3 = -3 - 3\alpha$, amelyet **x vektor** formájában is felírhatunk, melyben az ***x***-ek **sorrendben** szerepelnek (**legfelül az $x_1$** és így tovább).

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 1\alpha \\ -4 - 1\alpha \\ -3 - 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 1\alpha \\ -4 - 1\alpha \\ -3 - 3\alpha \\ 0 + 1\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**3.példa:**

$x_1 = 2 - 1x_3$ $\quad$ $x_3$ **szabad ismeretlen helyére** $\alpha$, $x_4$ **helyére pedig** $\beta$ **paraméter kerül, tehát** $x_3 = \alpha$ **és** $x_4 = \beta$ $\quad$ $x_1 = 2 - 1\alpha$

$x_2 = 3 - 2x_3 + 3x_4$ $\quad$ $x_2 = 3 - 2\alpha + 3\beta$

**Tehát a megoldás:** $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_1 = 2 - \alpha$, $x_2 = 3 - 2\alpha + 3\beta$, amelyet $\underline{x}$ **vektor** formájában is felírhatunk, melyben az $x$-ek **sorrendben** szerepelnek (**legfelül az** $x_1$ és így tovább).

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1\alpha \\ 3 - 2\alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1\alpha + 0\beta \\ 3 - 2\alpha + 3\beta \\ 0 + 1\alpha + 0\beta \\ 0 + 0\alpha + 1\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**4F.LÉPÉS:** Ha a feladat **bázismegoldás** illetve **partikuláris megoldás** kiszámítását is kéri, akkor a következőt tesszük:

**Bázismegoldás:** Az **összes szabad ismeretlen** (az **összes paraméter**) helyére **nullát** írunk

**3.példa:** bázismegoldás esetén $\alpha$**=0** és $\beta$**=0**, tehát elvégezve a helyettesítést a következőt kapjuk:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1\alpha \\ 3 - 2\alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1*0 \\ 3 - 2*0 + 3*0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Partikuláris megoldás:** A **szabad ismeretlenek** (a **paraméterek**) helyére **tetszőleges**en választott számokat írunk

**3.példa:** Legyen mondjuk $\alpha$**=1** és $\beta$**=2** (**de bármilyen más szám is lehetne**), tehát elvégezve a helyettesítést a következőt kapjuk:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1\alpha \\ 3 - 2\alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1*1 \\ 3 - 2*1 + 3*2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# EZZEL A FELADATMEGOLDÁS VÉGETÉRT

## 2. Paramétert tartalmazó eset

A paramétert is tartalmazó feladattípus **lényege nem a konkrét megoldás**, hanem annak elemzése, hogy a **paraméter különböző értékeitől függően van e megoldás**a az egyenletrendszernek, ha van megoldása, akkor **hány megoldás**a van, illetve **mekkora** az egyenletrendszer **szabadságfok**a. Ilyen esetben a felírt egyenletrendszer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ stb **paramétereket** is **tartalmaz**.

**1.Példa**: Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 \quad\quad + \alpha x_3 &= \beta \end{aligned}$$

A feladatmegoldás lépései hasonlóak a „**1. Paramétert nem tartalmazó eset**” című részben leírtakkal. (A bázistranszformáció során úgy járunk el, ahogyan azt a „**Bázistranszformáció**” **című fejezet**ben a **paramétert tartalmazó eset**nél bemutattuk, de a generáló elem választásánál lehetnek kiegészítések)

**1.LÉPÉS:** Megegyezik a **1. Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **1.LÉPÉS**-sel.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 |
| | 1 | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ |

**2. LÉPÉS:** Bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre az induló táblázattól kezdődően addig, amíg olyan táblázatot nem kapunk, amelyben már nem tudunk generáló elemet választani. (A bázistranszformáció menete azonos a „**Bázistranszformáció**” **című fejezet**ben a **paramétert tartalmazó eset**nél leírtakkal, de a generáló elem választásánál lehetnek kiegészítések)

**2A.LÉPÉS:** Generáló elemet választunk az alábbi szabályok betartásával:

→ **b oszlopból TILOS generáló elemet választani**

→ **csak olyan sorból** választhatunk, **amely sor elején a bázis üres**, azaz ahol a bázisban még nincs vektor (Természetesen az első táblázat esetén ez bármelyik sorra teljesül, tehát bármelyik sorban választhatunk, később azonban ez már nem lesz érvényes)

→ **paraméter sosem lehet generáló elem**

→ **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan sorban** választani generáló elemet, **amely** sor egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. **Ha mindegyik sorban van paraméter**, akkor az **előbbi 2 szabály betartásával bármelyik sorban** választhatunk generáló elemet.

→ **célszerű** (de **NEM KÖTELEZŐ!!**) **olyan oszlopban** választani generáló elemet, **amely** oszlop egyáltalán **nem tartalmaz paramétert**. Ha minden oszlop tartalmaz paramétert, akkor érdemes a legkevesebb paramétert tartalmazó oszlopból választani

→ a generáló elem **nulla kivételével bármilyen szám** lehet (célszerű - de nem kötelező - olyan számot választani, amely számmal az adott szám sorának összes többi elemét el tudjuk osztani maradék nélkül, mert így elkerüljük, hogy törtekkel kelljen dolgozni, ezért az 1-es például mindig jó választás)

Az **1.LÉPÉS**ben felírt induló táblázat esetén a következőképp gondolkodunk:

→ **b** oszlopból tilos generáló elemet választani

→ bármelyik sorban választhatunk generáló elemet, mert egyik sor elején sincsen még a bázisban vektor

→ a táblázatban szereplő α paraméter nem lehet generáló elem

→ a 3. sor tartalmaz paramétert, ezért ebből a sorból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot és van 2 olyan sorunk (1. és 2. sor), amelyben nincs paraméter. Ha nem lenne olyan sorunk, amelyben nincs paraméter, akkor kénytelenek lennénk paramétert tartalmazó sorban választani.

→ a 3. oszlop tartalmaz paramétert, ezért ebből az oszlopból nem célszerű a választás, mert ez elbonyolítaná a feladatot.

→ a nulla nem lehet generáló elem

→ összefoglalva a fentieket: az 1. vagy a 2. sorból és az 1. vagy a 2. oszlopból választjuk bármelyik nullától különböző elemet, de célszerű valamelyik 1-est választani, hogy a számítás során ne keletkezzenek törtek (ha nincs 1-es és olyan szám sincs, amellyel a sor összes száma osztható, akkor bele kell törődnünk, hogy törtekkel fogunk dolgozni)

A példában választásunk legyen a **következő**:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ |

**2B.LÉPÉS:** Megegyezik a **1. Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **2B.LÉPÉS**-sel.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | | | |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | | | |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | | | |

**2C.LÉPÉS:** Megegyezik a **1. Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **2C.LÉPÉS**-sel.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | | | |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | 1/1=1 | -1/1=-1 | 3/1=3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | | | |

**2D.LÉPÉS:** Megegyezik a **1. Paramétert nem tartalmazó eset** című fejezetben leírt **2D.LÉPÉS**-sel.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | | | |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | | | |

**(1,-1) – (1)*(2,0) = (1,-1) – (2,0) = (-1,-1)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | | | | | -1 | | |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | | | | | -1 | | |

**(1,α) – (-1)*(2,0) = (1,α) – (-2,0) = (3,α)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | -1 | | | | -1 | 3 | |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | -1 | | | | -1 | $\alpha$ | |

**(4,β) – (3)*(2,0) = (4,β) – (6,0) = (-2,β)**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | -1 | 3 | | | -1 | 3 | -2 |
| | 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | -1 | $\alpha$ | | | -1 | $\alpha$ | $\beta$ |

**2A-2D.LÉPÉSEK** elvégzése után a következőképpen néz ki a feladatunk:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | | -1 | 3 | -2 |
| | 1 | 1 | -1 | 3 | $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ | | -1 | $\alpha$ | $\beta$ |

**2E.LÉPÉS:** A kapott új táblázatról haladunk tovább, mégpedig úgy, hogy ismét végrehajtjuk a **2A-2D.LÉPÉSEK**-et addig, ameddig a **2A. LÉPÉS**-nél el nem akadunk, azaz valami miatt nem tudunk generáló elemet választani. A példában ez a következőképpen alakul (**2A**, **2B**, **2C**, **2D**):

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 |
| -1 | 0 | α | β |

| | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | -1 | 3 | -2 |
| $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | α | β |

| | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | α - 3 | β + 2 |

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | $\boxed{1}$ | -1 | 3 |
| -1 | 0 | α | β |

| | $x_1$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | $\boxed{-1}$ | 3 | -2 |
| $x_2$ | 1 | -1 | 3 |
| | -1 | α | β |

| | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | α - 3 | β + 2 |

**2.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & \alpha x_4 & = & \beta \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | α | β |
| 0 | -1 | 1 | 2 | 1 |

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 2 |
| | 2 | -1 | α-2 | β-2 |
| | -1 | $\boxed{1}$ | 2 | 1 |

| | $x_2$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 |
| | $\boxed{1}$ | α | β-1 |
| $x_3$ | -1 | 2 | 1 |

| | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -α | 2-β |
| $x_2$ | α | β-1 |
| $x_3$ | α+2 | β |

**3.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & 2x_4 & = & -\beta \\ & & x_2 & - & \alpha x_3 & + & x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 & + & 4x_4 & = & \beta \end{array}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 1 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | α | 2 | -β |
| 0 | 1 | -α | 1 | β |
| 1 | 2 | -α | 4 | β |

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 3 | 0 |
| | -1 | α | -1 | -β |
| | $\boxed{1}$ | -α | 1 | β |
| | 1 | -α | 1 | β |

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | α | 2 | -β |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | -α | 1 | β |
| | 0 | 0 | 0 |

**4.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & 2x_4 & = & -\beta \\ & & x_2 & - & \alpha x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & \alpha x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \end{array}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 1 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | α | 2 | -β |
| 0 | 1 | -α | 1 | 2 |
| 1 | 2 | -α | 4 | 1 |

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 3 | 0 |
| | -1 | α | -1 | -β |
| | $\boxed{1}$ | -α | 1 | 2 |
| | 1 | -α | 1 | 1 |

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | α | 2 | -2 |
| | 0 | 0 | 2-β |
| $x_2$ | -α | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | -1 |

**5.Példa**: Hajtsuk végre az **1. és 2. LÉPÉS**eket (azaz bázistranszformáljunk, ameddig csak lehet) a következő feladat esetén:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \alpha x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & + & 3x_4 & = & \beta \end{array}$$

Az **utolsó táblázat**, ahol már nem tudjuk végrehajtani a **2A.LÉPÉS**T az alábbi:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | α | 4 | 4 |
| 1 | 1 | α | 3 | 3 |
| 1 | 1 | α | 3 | β |

| | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | α | 2 | 2 |
| | $\boxed{1}$ | α | 2 | 2 |
| | 1 | α | 2 | β-1 |

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | -α | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | α | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | β-3 |

Ha eljutunk az utolsó táblázathoz, azaz már nem tudunk újabb generáló elemet választani, akkor folytatjuk a feladatmegoldást a **3.LÉPÉS**sel

**3. LÉPÉS:** Megnézzük az **utolsó táblázat**ot, amelyen már nem tudtunk generáló elemet választani. Ezt a táblázatot besoroljuk a következő esetek valamelyikébe (az utolsó táblázat az alábbi **három eset közül csak az egyikbe sorolható be!!!**).

**1.eset:** A **bázisban** már **nincsen üres hely**. A **2.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $-\alpha$ | $2-\beta$ |
| $x_2$ | $\alpha$ | $\beta-1$ |
| $x_3$ | $\alpha+2$ | $\beta$ |

**Következtetés:** A **paraméterek bármely értéke mellett van megoldás**a az egyenletrendszernek. Ha a **bázison kívül** (táblázat tetején) **nincsen ismeretlen** (nincsen $x$), csak a $b$ szerepel itt, akkor **mindig 1 megoldás** van (**szabadságfok nulla**), ha a **bázison kívül** (táblázat tetején) viszont **marad ismeretlen** (van $x$), nemcsak a $b$ szerepel itt, akkor **mindig végtelen sok megoldás** van (**szabadságfok** egyenlő a **bázison kívüli ismeretlenek számá**val). További vizsgálat nem szükséges, a **feladatmegoldás itt végetér**.

A **2.példában** tehát a **paraméter bármely értéke mellett végtelen sok megoldás** lesz, a **szabadságfo**k pedig **1**.

**2.eset:** A **bázisban** még **van üres hely** és **azokban a sorokban, ahol a bázis üres** a ***b* oszlopon kívüli összes szám nulla**. A **3, 4, 5.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik. Ilyenkor a táblázatot **tovább osztályozzuk** aszerint, hogy a **2a.**, **2b.** vagy **2c. eset**hez tartozik e, ami attól függ, hogy **mit tratalmaz a *b* oszlop azokban a sorokban, ahol a bázis üres**.

**3.példa**

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | $-\beta$ |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | $\beta$ |
| | 0 | 0 | 0 |

**4.példa**

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | -2 |
| | 0 | 0 | $2-\beta$ |
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | -1 |

**5.példa**

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | $\beta-3$ |

**2a.eset:** **Azokban a sorokban, ahol a bázis üres**, a ***b* oszlopban mindenütt nulla** áll. A **3.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | $-\beta$ |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | $\beta$ |
| | 0 | 0 | 0 |

**Következtetés:** A **paraméterek bármely értéke mellett végtelen megoldás**a van az egyenletrendszernek (**szabadságfok** egyenlő a **bázison kívüli ismeretlenek számá**val). További vizsgálat nem szükséges, a **feladatmegoldás itt végetér**.

**2b.eset:** **Azokban a sorokban, ahol a bázis üres**, a ***b* oszlopban legalább egy helyen nullától különböző szám van (konkrét szám és nem paraméter!!!)**. A **4.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | -2 |
| | 0 | 0 | $2-\beta$ |
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | -1 |

**Következtetés:** A **paraméterek bármely értéke mellett nincs megoldás**a az egyenletrendszernek. További vizsgálat nem szükséges, a **feladatmegoldás itt végetér**.

**2c.eset:** **Azokban a sorokban, ahol a bázis üres**, a ***b* oszlopban legalább egy helyen paraméteres kifejezés van, ahol pedig nem paraméteres kifejezés, ott nulla áll.** Az **5.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $-\alpha$ | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | $\alpha$ | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | $\beta-3$ |

**Következtetés:** A **paraméterek értékétől függ**, hogy **van e megoldás**, ami **további vizsgálat**ot igényel.

**3.eset:** A **bázisban** még **van üres hely** és **legalább az egyik olyan sorban, ahol a bázis üres van paraméter** a ***b* oszlopon kívül**. Az **1.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | $\alpha - 3$ | $\beta + 2$ |

**Következtetés:** A **paraméterek értékétől függ**, hogy **van e megoldás**, illetve **hány megoldás van**, ami **további vizsgálat**ot igényel.

Ha besoroltuk az utolsó táblázatot az előbbi esetkek egyikébe, akkor **folytatjuk** a feladatmegoldást a **4.LÉPÉS**sel, **kivéve** azokat az eseteket (**1.eset, 2a.eset és 2b.eset**), ahol a feladatmegoldás a **3.LÉPÉS**sel **végetért**.

**4. LÉPÉS:** Az **utolsó táblázat**ról kiindulva meghatározzuk, hogy a **paraméterek különböző értékei esetén van e megoldás**, **hány megoldás** van és **mekkora** az egyenletrendszer **szabadságfok**a. A számítás menete attól függ, hogy az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél melyik esethez tartozott, ennek alapján itt **két eset lehetséges**.

**1.eset:** Az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél a **2c.eset**hez tartozott. Az **5.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $x_4$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | -α | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | α | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | β-3 |

Ilyenkor a számítást a következő lépések szerint hajtjuk végre az utolsó táblázatról kiindulva:

**4A.LÉPÉS: Kiválasztjuk** a ***b* oszlopból** azokat a **paramétert tartalmazó cellák**at, **amelyek olyan sorokban** helyezkednek el, **ahol a bázis üres** (A példában egyetlen ilyen cella van, amelyben β-3 szerepel).

| | $x_3$ | $x_4$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | -α | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | α | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | β-3 |

**4B.LÉPÉS:** A **4A.LÉPÉS**ben kiválasztott cellákban szereplő **paraméteres kifejezések mindegyikét nullával tesszük egyenlővé** és **kiszámítjuk a paraméterek értékeit**.

**β – 3 = 0** amelyből **β = 3** adódik.

**4C.LÉPÉS:** Értékeljük a kapott eredményeket.

→ Ha **ugyanarra a paraméterre több különböző érték**et kapunk, akkor az egyenletrendszernek **nincs megoldás**a

→ Ha az **összes paraméter** egyidejűleg (**egyszerre**) **a kiszámított érték**et veszi fel, akkor az egyenletrendszernek **végtelen** sok **megoldás**a van (**szabadságfok** egyenlő a **bázison kívüli ismeretlenek számá**val), **bármilyen más** paraméter**érték** mellett **nincs megoldás**.

**A példában:** Ha **β = 3**, akkor **végtelen** sok **megoldás** van, a **szabadságfok 2**, bármely **más** paraméter**érték** mellett viszont **nincs megoldás**.

**2.eset:** Az utolsó táblázat a **3.LÉPÉS**nél a **3.eset**hez tartozott. Az **1.példa** utolsó táblázata ehhez az esethez tartozik.

| | $x_3$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | α - 3 | β + 2 |

Ilyenkor a megoldást a következő lépések segítségével kapjuk meg az utolsó táblázatról kiindulva:

**4A.LÉPÉS:** Azokból a **sorok**ból, **amelyek elején a bázis üres**, kiválasztjuk az **egyik olyan *b* oszlopon kívüli cellát**, amely **paramétert tartalmaz**. (A példában csak egyetlen ilyen cella található, de ha több van, akkor a választás tetszőleges)

**A példában:** válasszuk az $x_3$ **oszlopban** lévő (**α - 3**)-at tartalmazó cellát

**4B.LÉPÉS:** A **4A.LÉPÉS**ben kiválasztott cellában szereplő **paraméteres kifejezést nullával tesszük egyenlővé** és **kiszámítjuk a paraméter értékét**.

**A példában:** **α – 3 = 0** amelyből **α = 3** adódik

A továbbiakban **két esetet vizsgálunk** meg attól függően, hogy a **paraméter a kiszámított értéket veszi e fel vagy nem**.

**A példában:** **a)eset:** **α** = 3 és **b)eset:** **α** ≠ 3

A megoldás további lépései a fenti két esetben eltérőek (**Mindkét esethez tartozó lépéseket végre kell hajtani**, mégpedig **először** az **a)eset**, **ezt követően** a **b)eset** lépéseit is).

**a)eset** (amikor a paraméter a **4B.LÉPÉS**ben kiszámított értéket veszi fel) lépései a következők:

**4C.LÉPÉS:** A **4B.LÉPÉS**ben a **paraméter**re kapott **értéket behelyettesítjük** a **táblázatba** az **összes ilyen paraméter helyére**, majd a kapott **új táblázattal dolgozunk tovább**.

**α = 3 behelyettesítése után:**

**Ha α = 3**

| | $x_3$ | $\underline{b}$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | 0 | β + 2 |

**4D.LÉPÉS:** Ha **4C.LÉPÉS**ben a kapott **új táblázatban tudunk generáló elemet választani**, akkor **bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre** a **2.LÉPÉS**ben leírtak **szerint** addig, amíg olyan táblázatot nem kapunk, ahol már nem tudunk generáló elemet választani. Ha **4C.LÉPÉS**ben a kapott **új táblázatban nem tudunk generáló elemet választani**, akkor nem csinálunk semmit, **megtartjuk a 4C.LÉPÉS**ben **kapott táblázatot**.

**4E.LÉPÉS:** **Értékeljük** azt a **táblázatot**, amit a **4D.LÉPÉS** végrehajtása **után** kaptunk. Ha nem kellett semmit tennünk a **4D.LÉPÉS**ben, akkor a **4C.LÉPÉS** táblázatát értékeljük.(**Értékelni mindig csak olyan táblázatot szabad, ahol már nem tudunk generáló elemet választani!!)**

A példában már nem tudunk újabb generáló elemet választani, tehát a **4C.LÉPÉS**ben kapott táblázatot értékeljük.

**Ha $\alpha = 3$**

| | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | 0 | $\beta + 2$ |

A példában már nem tudunk újabb generáló elemet választani, tehát a **4C.LÉPÉS**ben kapott táblázatot értékeljük. Az értékelés úgy történik, hogy **ezzel a táblázattal elvégezzük** a **3.LÉPÉS**t, majd ha szükséges, akkor **ezután** a **4.LÉPÉS**t is. (Tulajdonképpen ez azt jelenti, hogy a **3.LÉPÉS**t és a **4.LÉPÉS**t felváltva addig ismételjük, ameddig csak lehet)

A fenti táblázat a **3.LÉPÉS szerint** a **2c.eset**hez tartozik, majd a **4.LÉPÉS szerint** az **1.eset**hez, ezért az értékelés a következő:

Ha **$\alpha = 3$ és $\beta + 2 = 0$** , azaz **$\beta = -2$**, akkor **végtelen** sok **megoldás** van, a **szabadságfok 1**, ha viszont **$\alpha = 3$** és **$\beta \neq -2$,** akkor **nincs megoldás**.

Ne felejtsük el végrehajtani ezután a **4B.LÉPÉS**ben említett **b)eset**et is**!!!**

**b)eset** (amikor a paraméter nem a **4B.LÉPÉS**ben kiszámított értéket veszi fel) lépései a következők:

**4C.LÉPÉS:** A **4A.LÉPÉS**ben kiválasztott cellában lévő **paraméteres kifejezést generáló elemnek választva bázistranszformációk sorozatát hajtjuk végre** a **2.LÉPÉS szerint** mindaddig, ameddig még tudunk generáló elemet választani.

**Ha $\alpha \neq 3$**

| | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 1 |
| | $\alpha - 3$ | $\beta + 2$ |

**Ha $\alpha \neq 3$**

| | $b$ |
|---|---|
| $x_1$ | $(2\alpha+3\beta)/(\alpha-3)$ |
| $x_2$ | $(\alpha-2\beta-4)/(\alpha-3)$ |
| $x_3$ | $(\beta+2)/(\alpha-3)$ |

**4D.LÉPÉS:** **Értékeljük** azt a **táblázatot**, amit a **4C.LÉPÉS** végrehajtása **után** kaptunk.(**Értékelni mindig csak olyan táblázatot szabad, ahol már nem tudunk generáló elemet választani!!)**

**Ha $\alpha \neq 3$**

| | $b$ |
|---|---|
| $x_1$ | $(2\alpha+3\beta)/(\alpha-3)$ |
| $x_2$ | $(\alpha-2\beta-4)/(\alpha-3)$ |
| $x_3$ | $(\beta+2)/(\alpha-3)$ |

Az értékelés úgy történik, hogy **ezzel a táblázattal elvégezzük** a **3.LÉPÉS**t, majd ha szükséges, akkor **ezután** a **4.LÉPÉS**t is. (Tulajdonképpen ez azt jelenti, hogy a **3.LÉPÉS**t és a **4.LÉPÉS**t felváltva addig ismételjük, ameddig csak lehet)

A fenti táblázat a **3.LÉPÉS szerint** az **1.eset**hez tartozik, ezért nem szükséges **4.LÉPÉS** így az értékelés a következő:

Ha **$\alpha \neq 3$**, akkor **$\beta$ paraméter bármely értéke mellett egyetlen megoldás** van, a **szabadságfok 0.**

# EZZEL A FELADATMEGOLDÁS VÉGETÉRT