

PÉNZÁRAMLÁSOK JELENÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSA II.

1. Határozd meg a következő pénzáramlás sorozat jelenértékét az első hónap elején abban az esetben, ha az éves nominális hozam 12%, a hozamgörbe vízszintes!

A második hónap végén 100 Ft, majd a harmadik hónap végétől 5 hónapon keresztül az előző havinhoz képest 0,5%-kal nagyobb összeg, majd a tizedik hónap végétől kezdődően minden második hónap végén 150 Ft örökké.

2. Határozd meg a következő pénzáramlás sorozat jelenértékét az első hónap elején abban az esetben, ha az éves effektív hozam 9%, a hozamgörbe pedig vízszintes!

Az első hónap elejétől kezdődően 10 hónapon át minden hónap elején 500 Ft, majd a 14. hónap végén 1000 Ft, végül a 15. hónap végétől kezdődően minden hónap végén az előző havinhoz képest 0,5%-kal nagyobb összeg a végtelenségig.

3. Határozd meg a következő pénzáramlás sorozat értékét a 15. év végén abban az esetben, ha az éves effektív hozam 10%, a hozamgörbe pedig vízszintes!

Négy éven keresztül minden év elején 1000 Ft, az ötödik év elejétől 5 éven keresztül minden év elején 2000 Ft, végül a tizedik év elejétől kezdődően 4 éven át minden év elején az előző évihez képest 5%-kal nagyobb összeg.

4. Határozd meg a következő pénzáramlás sorozat értékét december 31-én abban az esetben, ha az első féléves (január 1-től június 30-ig) effektív hozam 5%, a második féléves (július 1-től december 31-ig) effektív hozam pedig 6%!

Január elsejétől kezdődően kéthavonta minden hónap elején 1000 Ft, az utolsó összeg november elsején.

5. Az alábbi két pénzáramlás sorozat közül melyik a kedvezőbb abban az esetben, ha pozitív pénzáramlásokról van szó, az éves nominális hozam 12%, a hozamgörbe vízszintes?

a) január 1-jén 100 Ft, majd 5 hónapon át minden hónap elsején az előző havinhoz képest 0,5%-kal nagyobb összeg, végül július 1-jétől december 1-ig 200 Ft minden hónap elsején

b) január 31-én 15 Ft, majd minden második hónap végén az előző összeghez képest 0,5%-kal nagyobb összeg a végtelenségig

6. Február 1-jén 10 millió Ft hitelt veszünk fel 20%-os éves kamatláb mellett. A törlesztés és kamatfizetés azonos összegek formájában minden év február 1-jén esedékes. Az első részletet 1-év múlva fizetjük, a hitel futamideje 10 év. Határozd meg az egyetlen alkalommal fizetendő részlet nagyságát!

7. Március 1-jén hitelt veszünk fel 24%-os éves nominális kamatláb mellett. A törlesztés és kamatfizetés azonos összegek formájában minden hónap 1-jén esedékes. Az első részletet 4 hónap múlva fizetjük, a hitel futamideje (a felvételtől az utolsó törlesztésig eltelt idő) 5 év. Maximum mekkora összegű hitelt kaphatunk ilyen feltételek mellett abban az esetben, ha a havonta visszafizetendő összeg 60 ezer Ft-nál nem lehet nagyobb!

8. Július 1-jén 2 millió Ft hitelt veszünk fel 18%-os éves kamatláb mellett. A törlesztés és kamatfizetés azonos összegek formájában minden év július 1-jén esedékes. Az első részletet 1-év múlva fizetjük. Minimum hány éves futamidőre kell felvennünk a hitelt abban az esetben, ha az évente visszafizetendő összeg nem haladhatja meg a 600 ezer Ft-ot?

9. Mivel bizonytalan, hogy fogunk e nyugdíjat kapni, takarékoskodni kezdünk 2012. január 1-jétől kezdve. A nyugdíjba vonulásunk időpontja legyen az egyszerűség kedvéért 2045. január 1. és tételezzük fel, hogy nyugdíjra és egyéb bevételi forrásra nem támaszkodhatunk ettől az időponttól kezdve, azaz csak az az összeg áll rendelkezésre, amit felhalmoztunk. Előzetes számításaink szerint a 2045-ös évben havonta 300 ezer Ft-ra lesz szükségünk költségeink fedezésére, melyet minden hónap 1-jén veszünk ki a bankból. A későbbi években ez az összeg az infláció következtében 4%-kal magasabb kell legyen az előző évihez képest. Úgy számolunk, hogy biztosan nem élünk 2070. december 31-nél tovább és a nyugdíjas évek teljes tartama alatt az effektív hozam évi 6%, a hozamgörbe vízszintes. Mekkora összeggel kezdjük a takarékoskodást a következő feltételek esetén külön-külön?

a) minden hónap végén (először 2012. január 31-én, utoljára 2044. december 31-én) teszünk félre, mindig azonos összeget, az éves effektív hozam 8%, a hozamgörbe vízszintes.

b) minden hónap végén (először 2012. január 31-én, utoljára 2044. december 31-én) teszünk félre, az infláció miatt minden hónapban az előző hónaphoz képest 0,5%-kal nagyobb összeget, az éves effektív hozam 8%, a hozamgörbe vízszintes.

MEGOLDÁSOK

1) az első 7 periódus: $r_{\text{havi}} = 0,12/12 = 0,01$ azaz 1%/hó, jelenérték az első periódus végén $100 \cdot (1/(0,01-0,005)) \cdot (1-(1,005/1,01)^6) = 586,755$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $586,755/1,01$, számítás a 7. periódus után: $r_2 \text{ havi} = 0,12/6 = 0,02$ azaz 2%/2hó, jelenérték a nyolcadik periódus végén $150/0,02 = 7500$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $7500/1,01^8$, az összes jelenérték az első periódus elején: $586,755/1,01 + 7500/1,01^8 = 7507,07$ Ft

2) az első 9 periódus: $r_{\text{havi}} = 1,09^{1/12} - 1 = 0,0072$ azaz 0,72%/hó, $AF(9;0,72\%) = (1/0,0072) \cdot (1-(1/1,0072)^9) = 8,6844$, jelenérték az első periódus elején $500 + 500 \cdot AF(9;0,72\%) = 4842,19$ Ft, számítás a 9. periódus után: $r_{\text{havi}} = 1,09^{1/12} - 1 = 0,0072$ azaz 0,72%/hó, jelenérték a tizenharmadik periódus végén $1000/(0,0072-0,005) = 454545,45$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $454545,45/1,0072^{13}$, az összes jelenérték az első periódus elején: $4842,19 + 454545,45/1,0072^{13} = 418911,45$ Ft

3) az első 3 periódus: $AF(3;10\%) = (1/0,1) \cdot (1-(1/1,1)^3) = 2,4869$, jelenérték az első periódus elején $1000 + 1000 \cdot AF(3;10\%) = 3486,85$ Ft, a következő 4 periódus: $AF(4;10\%) = (1/0,1) \cdot (1-(1/1,1)^4) = 3,1699$, jelenérték a harmadik periódus végén $2000 \cdot AF(4;10\%) = 6339,73$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $6339,73/1,1^3$, számítás a 7. periódus után: jelenérték a 7. periódus végén $2000 \cdot (1/(0,01-0,005)) \cdot (1-(1,005/1,01)^5) = 8301,18$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $8301,18/1,1^7$, az összes jelenérték az első periódus elején: $3486,85 + 6339,73/1,1^3 + 8301,18/1,1^7 = 12509,8$ Ft, ennek jövőértéke a 15. periódus végén: $12509,8 \cdot 1,1^{15} = 52256,54$ Ft

4) az első 6 hónap: $r_2 \text{ havi} = 1,05^{1/3} - 1 = 0,0164$ azaz 1,64%/2hó, $AF(3;1,64\%) = (1/0,0164) \cdot (1-(1/1,0164)^3) = 2,9042$, jelenérték az első periódus elején $1000 + 1000 \cdot AF(3;1,64\%) = 3904,224$ Ft, számítás a következő hónapokra: $r_2 \text{ havi} = 1,06^{1/3} - 1 = 0,0196$ azaz 1,96%/2hó, $AF(2;1,96\%) = (1/0,0196) \cdot (1-(1/1,0196)^2) = 1,9427$, jelenérték a 6. hónap végén $1000 \cdot AF(2;1,96\%) = 1942,7$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $1942,7/1,05$, az összes jelenérték az első periódus elején: $3904,224 + 1942,7/1,05 = 5754,41$ Ft, ennek jövőértéke december 31-én: $5754,41 \cdot 1,05 \cdot 1,06 = 6404,66$ Ft

5a) az első 5 periódus: $r_{\text{havi}} = 0,12/12 = 0,01$ azaz 1%/hó, jelenérték az első periódust megelőző periódus elején $100 \cdot (1/(0,01-0,005)) \cdot (1-(1,005/1,01)^6) = 586,755$ Ft, ennek jövőértéke az első periódus elején $586,755 \cdot 1,01$, számítás az 5. periódus után: $r_{\text{havi}} = 0,12/12 = 0,01$ azaz 1%/hó, $AF(6;1\%) = (1/0,01) \cdot (1-(1/1,01)^6) = 5,7955$, jelenérték az ötödik periódus végén $200 \cdot AF(6;1\%) = 1159,1$ Ft, ennek jelenértéke az első periódus elején $1159,1/1,01^5$, az összes jelenérték az első periódus elején: $586,755 \cdot 1,01 + 1159,1/1,01^5 = 1695,47$ Ft

5b) $r_2 \text{ havi} = 0,12/6 = 0,02$ azaz 2%/2hó, jelenérték az első hónapot megelőző hónap elején $15/(0,02-0,005) = 1000$ Ft, ennek jövőértéke az első hónap elején $1000 \cdot 1,01$, tehát a jelenérték az első hónap elején $1000 \cdot 1,01 = 1100$ Ft, melyet összehasonlítva az 5a) esettel adódik, hogy az 5a) eset a kedvezőbb

6) az évente visszafizetett összeg legyen $-x$, $AF(10;20\%) = (1/0,2) \cdot (1-(1/1,2)^{10}) = 4,1925$, a visszafizetett összeg jelenértéke a hitel felvételekor $-x \cdot AF(10;20\%) = -4,1925x$, mivel a hitelfelvétel nettó jelenértéke 0 kell legyen $-4,1925x + 10$ millió Ft = 0, melyből kifejezve adódik, hogy az éves törlesztőrészlet $x = 2,3852$ millió Ft

7) $r_{\text{havi}} = 0,24/12 = 0,02$ azaz 2%/hó, a hitelfelvételtől az utolsó törlesztésig $5 \cdot 12 = 60$ hónap telik el, de az első 3 hónapban nincs törlesztés, ezért 57 db azonos 60 ezer Ft összegű törlesztőrészlettel kell számolni, $AF(57;2\%) = (1/0,02) \cdot (1-(1/1,02)^{57}) = 33,828$, a törlesztőrészletek jelenértéke a 3. hónap végén $-60 \cdot AF(57;2\%) = -2029,69$ ezer Ft, ennek jelenértéke a hitel felvételekor $-2029,69/1,02^3 = -1912,62$ ezer Ft, ezért a felvett hitel összege nem lehet nagyobb, mint 1912,62 ezer Ft, mert így lesz az összes jelenérték nulla

8) a törlesztési periódusok száma legyen x , $AF(x;18\%) = (1/0,18) \cdot (1-(1/1,18)^x)$, a visszafizetett összeg jelenértéke a hitel felvételekor $-600 \cdot AF(x;20\%)$, mivel a hitelfelvétel nettó jelenértéke 0 kell legyen $-600 \cdot AF(x;20\%) + 2000$ ezer Ft = 0, melyből kifejezve adódik, hogy az $AF(x;20\%) = 10/3$, melyet x -re megoldva kapjuk, hogy $x = 5,536$ év, tehát a hitelt minimum 6 éves futamidőre kell felvennünk

9) a 2045. január 1-től december 31-ig terjedő első nyugdíjas évre $r_{\text{havi}} = 1,06^{1/12} - 1 = 0,00487$ azaz 0,487%/hó, $AF(11;0,487\%) = (1/0,00487) \cdot (1-(1/1,00487)^{11}) = 10,68525$, így a jelenérték az első nyugdíjas év elején $-300 - 300 \cdot AF(11;0,487\%) = -3505,575$ ezer Ft, tehát olyan, mintha az első nyugdíjas év elején 3505 eFt-ot vennénk ki a bankból egyösszegben, amely biztosítja az első nyugdíjas év pénzigényét. Ezt az összeget minden évben 4%-kal kell növelnünk az infláció miatt, ezért úgy tekinthetjük, mintha minden további év január elsején 4%-kal magasabb összeget kellene kivennünk a bankból. A nyugdíjas évek (26 év) pénzáramlásai tehát növekvő annuitást alkotnak, melynek első összege 2045. január 1-jén -3505,575 ezer Ft, ezen pénzáramlás sorozat jelenértéke az első nyugdíjas évet megelőző év január 1-jén $-3505,575 \cdot (1/(0,06-0,04)) \cdot (1-(1,04/1,06)^{26}) = -68460,96$ ezer Ft, ennek jövőértéke az első nyugdíjas év elején $-68460,96 \cdot 1,06 = -72568,62$ ezer Ft, azaz olyan, mintha 2045. január 1-jén egyösszegben vennénk ki a bankból 72568,62 ezer Ft-ot, amely biztosítaná a teljes nyugdíjas periódus pénzzükségletét. Ebből az is következik, hogy 2045. január 1-jén (tekinthetjük 2044. december 31-ét is) ennyi pénznek kell rendelkezésre állnia, azaz ennyit kell felhalmoznunk 2012. január 1-től 2044. december 31-ig. Legyen a 2012. január hónapban megtakarított összeg x , a felhalmozási időszak alatt $r_{\text{havi}} = 1,08^{1/12} - 1 = 0,00643$ azaz 0,643%/hó, a periódusok száma pedig $33 \text{ év} \cdot 12 \text{ hó} = 396$ hó, ekkor

9a) $AF(396;0,643\%) = (1/0,00643) \cdot (1-(1/1,00643)^{396}) = 143,233$, így a teljes felhalmozott összeg jelenértéke 2012. január 1-jén $x \cdot AF(396;0,643\%) = 143,233x$, ennek jövőértéke 2044. december 31-én $143,233x \cdot 1,08^{33} = 1815,63x$, melynek éppen meg kell egyeznie a korábban kiszámított 72568,62 ezer Ft-tal, hiszen ekkora összegnek kell rendelkezésre állnia 2044. december 31-én, tehát $1815,63x = 72568,62$, melyből $x = 39,97$ ezer Ft, azaz 2012. január 31-től kezdve minden hónap végén ekkora összeget kell félretennünk **9b)** a teljes felhalmozott összeg jelenértéke 2012. január 1-jén $x \cdot (1/(0,00643-0,005)) \cdot (1-(1,005/1,00643)^{396}) = 301,075x$, ennek jövőértéke 2044. december 31-én $301,075x \cdot 1,08^{33} = 3816,44x$, melynek éppen meg kell egyeznie a korábban kiszámított 72568,62 ezer Ft-tal, hiszen ekkora összegnek kell rendelkezésre állnia 2044. december 31-én, tehát $3816,44x = 72568,62$, melyből $x = 19,015$ ezer Ft, azaz 2012. január 31-én ekkora összeget kell félretennünk, melyet minden hónap végén 0,5%-kal kell növelnünk