1. Számítsd ki az alábbi végtelenben vett határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \dfrac{x+1}{\ln^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-1}$ d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{4x^3-3x^4+5}{2x^2-6}$

e) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3^{4-2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}}{4^{x-1}+2}$ f) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3x^4-1}+2x}{3x+\sqrt{x^2+1}}$

g) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \dfrac{2^{2-x}+3^{x+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \dfrac{(x^2-2x^3)\cdot\ln x}{2^{2x}+1}$

2. Számítsd ki az alábbi véges helyen vett határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\mapsto 2} \dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ b) $\lim\limits_{x\mapsto 1-0} \dfrac{x^2(e^x+1)}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$ d) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{(\mathrm{tg}\,2x)\log_2(1+x)}{e^x-e^{-x}}$

e) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{1-\cos x}{4\sin x\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^2\cdot e^{-x^2}$ g) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \sin x\cdot\ln x^2$

h) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{arctg}\,3x$ i) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{x+e^{1/x}}{1+2e^{1/x}}$ j) $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x^2+x}$

3. Határozd meg a függvények monotonitási szakaszait, szélsőértékeit, konvex-konkáv szakaszait!

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{e^{-x^2}}$ d) $f(x) = (2-x)\sqrt{2x+4}$

4. Van-e az $f(x) = \mathrm{arctg}\,2x + \sqrt{3+\sin\pi x} - x$ függvénynek szélsőértéke az $x=\frac{1}{2}$ helyen?

5. Hol van szélsőértéke és milyen típusú szélsőértéke van az alábbi függvényeknek

a) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot e^{-x}$

MEGOLDÁSOK:

1a) $5/2$ 1b) ∞ 1c) e^{-3} 1d) $-\infty$ 1e) ∞ 1f) ∞ 1g) $-\infty$ 1h) 0

2a) $-\infty$ 2b) $-\infty$ 2c) -1 2d) 0 2e) 0 2f) 0 2g) 0 2h) 3

2i) baloldali: 0 jobboldali: $1/2$ 2j) 0

3a) $]-\infty;-1[$ szig. mon. nő, $]-1;0[$ szig. mon. csökken, $x=0$ lokális min.

$]0;\infty[$ szig. mon. nő, $]-\infty;-1[$ konvex, $]-1;\frac{1}{2}[$ konvex,

$x=\frac{1}{2}$ inflexiós pont, $]\frac{1}{2};\infty[$ konkáv

3b) $]0;e[$ szig. mon. csökk, $x=e$ lokális min, $]e;\infty[$ szig. mon. nő

$]0;e^{3/2}[$ konvex, $x=e^{3/2}$ inflexió, $]e^{3/2};\infty[$ konkáv

3c) $]-\infty;0[$ szig. mon. nő, $x=0$ lokális max, $]0;\infty[$ szig. mon. csökk.

$]-\infty;-1[$ konvex, $x=-1$ inflexió, $]-1;1[$ konkáv, $x=1$ inflexió, $]1;\infty[$ konvex

3d) $[-2;-2/3[$ szig. mon. nő, $x=-2/3$ lok. max, $]-2/3;\infty[$ szig. mon. csökk.

mindenütt konkáv, nincs inflexiós pont

4) $f'(\frac{1}{2})=0$, $f''(\frac{1}{2})=-2-\frac{\pi^2}{4}<0$, tehát lokális max.

5a) $x=2$ esetén $f'(2)=0$, $f''(2)=-2/3<0$, tehát lokális max.

5b) $x=-1$ esetén $f'(-1)=0$, $f''(-1)=-e<0$, tehát lokális max.