EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSÁNAK ALKALMAZÁSAI

I.Feladat: Egyváltozós függvény grafikonjához húzható érintőkkel kapcsolatos feladatok.

1.feladat: Határozza meg az $f(x)=\frac{2}{1+\ln x}$ függvény $x = 1$ abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét !

2.feladat: Határozza meg az $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$ függvény $x = 1$ abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét !

3.feladat: Határozza meg az $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ függvény $y=\frac{1}{2}$ ordinátájú pontjába húzható érintő egyenletét !

4.feladat: Határozza meg az $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{2-x}}$ függvény $y = 2$ ordinátájú pontjába húzható érintő egyenletét !

5.feladat: Határozza meg a P(3;2) pontból az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonjához húzható érintő egyenletét !

6.feladat: Határozza meg a P(1;-1) pontból az $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ függvény grafikonjához húzható érintő egyenletét !

7.feladat: Határozza meg az $f(x)=x\ln x$ függvény $4x - 2y = -5$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét !

8.feladat: Határozza meg az $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$ függvény $12x + 3y = 8$ egyenletű egyenesre merőleges érintőjének egyenletét !

II.Feladat: Egyváltozós függvény szélsőértékeivel, monotonitási szakaszaival kapcsolatos feladatok.

1.feladat: Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit, szélsőértékeit és monotonitási szakaszait !

1/a.feladat: $f(x)=\ln\ln x$ **1/b.feladat:** $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ **1/c.feladat:** $f(x)=\ln\sqrt{1-x}$

1/d.feladat: $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ **1/e.feladat:** $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$ **1/f.feladat:** $f(x)=x^2\ln x$

2.feladat: Határozza meg, hogy az alábbi függvényeknek lehet e szélsőértéke, és ha lehet, akkor mely x érték esetén és milyen típusú (minimum vagy maximum) szélsőértékük van !

2/a.feladat: $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ **2/b.feladat:** $f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$ **2/c.feladat:** $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}$

2/d.feladat: $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ **2/e.feladat:** $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ **2/f.feladat:** $f(x)=\frac{4x^3+1}{x}$

III.Feladat: Egyváltozós függvény inflexiós pontjaival, konvex és konkáv szakaszaival kapcsolatos feladatok.

1.feladat: Határozza meg az alábbi függvények inflexiós pontjait, konvex és konkáv szakaszait !

1/a.feladat: $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ **1/b.feladat:** $f(x)=x\ln\frac{1}{x}$ **1/c.feladat:** $f(x)=\frac{4-4x}{(x+1)^2}$

1/d.feladat: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ **1/e.feladat:** $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ **1/f.feladat:** $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$

2.feladat: Határozza meg, hogy az alábbi függvényeknek van e inflexiós pontja, és ha van, akkor mely x érték esetén !

2/a.feladat: $f(x)=x\mathrm{e}^{x}$ **2/b.feladat:** $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$ **2/c.feladat:** $f(x)=x^2\ln x^2$

2/d.feladat: $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$ **2/e.feladat:** $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ **2/f.feladat:** $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$

MEGOLDÁSOK:

I.Feladat:

1.feladat: az érintési pont koordinátái $x_0 = 1$ és $y_0 = \frac{2}{1+\ln 1} = 2$; $f'(x) = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$; az érintő meredeksége $m = \frac{-2}{1(1+\ln 1)^2} = -2$; az érintő egyenlete $-2(x-1)+2 = y$, azaz $-2x+4 = y$

2.feladat: az érintési pont koordinátái $x_0 = 1$ és $y_0 = \frac{\ln 1}{1+\ln 1} = 0$; $f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$; az érintő meredeksége $m = \frac{1}{1(1+\ln 1)^2} = 1$; az érintő egyenlete $1(x-1)+0 = y$, azaz $x-1 = y$

3.feladat: az érintési pont koordinátái $y_0 = \frac{1}{2}$, tehát $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+x_0^2}$, melyből $x_0 = \pm 1$; $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$; az érintő meredeksége $m = \frac{-2(\pm 1)}{[1+(\pm 1)^2]^2} = \mp\frac{1}{2}$; az érintők egyenletei $-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2} = y$, azaz $-\frac{1}{2}x+1 = y$ és $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2} = y$, azaz $\frac{1}{2}x+1 = y$

4.feladat: az érintési pont koordinátái $y_0 = 2$, tehát $2 = \frac{2x_0}{\sqrt{2-x_0}}$, melyből $x_0 = 1$; $f'(x) = \frac{4-x}{(2-x)\sqrt{2-x}}$; az érintő meredeksége $m = \frac{4-1}{(2-1)\sqrt{2-1}} = 3$; az érintő egyenlete $3(x-1)+2 = y$, azaz $3x-1 = y$

5.feladat: az érintési pont koordinátái x_0 és $y_0 = \sqrt{x_0}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; az érintő meredeksége $m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$; az érintő egyenlete $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\sqrt{x_0} = y$, melybe behelyettesítve P(3;2) pont koordinátáit $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(3-x_0)+\sqrt{x_0} = 2$ egyenletet kapjuk, melyből $x_0 = 1$ és $x_0 = 9$, melyből az érintők egyenletei $\frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)+\sqrt{1} = y$, azaz $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = y$ és $\frac{1}{2\sqrt{9}}(x-9)+\sqrt{9} = y$, azaz $\frac{1}{6}x+\frac{3}{2} = y$

6.feladat: az érintési pont koordinátái x_0 és $y_0 = \frac{1}{1+2x_0}$; $f'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}$; az érintő meredeksége $m = \frac{-2}{(1+2x_0)^2}$; az érintő egyenlete $\frac{-2}{(1+2x_0)^2}(x-x_0) + \frac{1}{1+2x_0} = y$, melybe behelyettesítve P(1;-1) pont koordinátáit $\frac{-2}{(1+2x_0)^2}(1-x_0) + \frac{1}{1+2x_0} = -1$ egyenletet kapjuk, melyből $x_0 = 0$ és $x_0 = -2$, melyből az érintők egyenletei $\frac{-2}{[1+2(0)]^2}(x-0) + \frac{1}{1+2(0)} = y$, azaz $-2x+1 = y$ és $\frac{-2}{[1+2(-2)]^2}(x+2) + \frac{1}{1+2(-2)} = y$, azaz $-\frac{2}{9}x-\frac{7}{9} = y$

7.feladat: a $4x - 2y = -5$ egyenletű egyenes egyenletét átrendezve $y = 2x + \frac{5}{2}$, melyből az egyenes meredeksége $m_{ismert} = 2$, a párhuzamosság miatt az érintő meredeksége is ugyanekkora; az érintési pont koordinátái x_0 és $y_0 = x_0 \ln x_0$; $f'(x) = 1 + \ln x$; az érintő meredeksége $m = 1+$, azaz $2 = 1 + \ln x_0$, melyből $x_0 = e$; $y_0 = x_0 \ln x_0 = e \ln e = e$; az érintő egyenlete $2(x-e)+e = y$, azaz $2x-e = y$

8.feladat: a $12x + 3y = 8$ egyenletű egyenes egyenletét átrendezve $y = -4x + \frac{8}{3}$, melyből az egyenes meredeksége $m_{ismert} = -4$, a merőlegesség miatt az érintő meredeksége $\frac{-1}{m_{ismert}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$; az érintési pont koordinátái x_0 és $y_0 = \frac{x_0}{1+\ln x_0}$; $f'(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$; az érintő meredeksége $m = \frac{\ln x_0}{(1+\ln x_0)^2}$, azaz $\frac{1}{4} = \frac{\ln x_0}{(1+\ln x_0)^2}$, melyből $x_0 = e$; $y_0 = \frac{x_0}{1+\ln x_0} = \frac{e}{1+\ln e} = \frac{e}{2}$; az érintő egyenlete $\frac{1}{4}(x-e)+\frac{e}{2} = y$, azaz $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}e = y$

II.Feladat:

1/a.feladat: **ÉT:** $x > 0$ és $\ln x > 0$, melyből $x > 1$, összesítve $\boldsymbol{x > 1}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{1}{x \ln x} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen szélsőértéke**; **MONOTONITÁS:** $f'(x) > 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért a függvény **mindenütt szigorúan monoton nő**

1/b.feladat: **ÉT:** $x + 1 \neq 0$, melyből $\boldsymbol{x \neq -1}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = -2}$ és $\boldsymbol{x = 0}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték helyek**; **MONOTONITÁS:** $]-\infty; -2[$ intervallumon $f'(x) > 0$, tehát **szigorúan monoton nő**, $]-2; -1[$ intervallumon $f'(x) < 0$, tehát **szigorúan monoton csökken**, $]-1; 0[$ intervallumon $f'(x) < 0$, tehát **szigorúan monoton csökken**, $]0; \infty[$ intervallumon $f'(x) > 0$, tehát **szigorúan monoton nő**, $\boldsymbol{x = -2}$ és $\boldsymbol{x = 0}$ esetén $f'(x)$ előjelet vált, tehát **itt szélsőérték van**, $\boldsymbol{x = -2}$ esetén **lokális maximum**, $\boldsymbol{x = 0}$ esetén **lokális minimum**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális maximum értéke** $f(-2) = \frac{(-2)^2}{(-2)+1} = \boldsymbol{-4}$, a **lokális minimum értéke** $f(0) = \frac{(0)^2}{(0)+1} = \boldsymbol{0}$

1/c.feladat: **ÉT:** $\sqrt{1-x} > 0$, melyből $\boldsymbol{x < 1}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{1}{2(x-1)} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen szélsőértéke**; **MONOTONITÁS:** $f'(x) < 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért a függvény **mindenütt szigorúan monoton csökken**

1/d.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = 0}$ és $\boldsymbol{x = 2}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték helyek**; **MONOTONITÁS:** $]-\infty; 0[$ intervallumon $f'(x) < 0$, tehát **szigorúan monoton csökken**, $]0; 2[$ intervallumon $f'(x) > 0$, tehát **szigorúan monoton nő**, $]2; \infty[$ intervallumon $f'(x) < 0$, tehát **szigorúan monoton csökken**, $\boldsymbol{x = 0}$ és $\boldsymbol{x = 2}$ esetén $f'(x)$ előjelet vált, tehát **itt szélsőérték van**, $\boldsymbol{x = 0}$ esetén **lokális minimum**, $\boldsymbol{x = 2}$ esetén **lokális maximum**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális minimum értéke** $f(0) = (0)^2\mathrm{e}^{-(0)} = \boldsymbol{0}$, a **lokális maximum értéke** $f(2) = (2)^2\mathrm{e}^{-(2)} = \boldsymbol{\frac{4}{e^2}}$

1/e.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen szélsőértéke**; **MONOTONITÁS:** $f'(x) > 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért a függvény **mindenütt szigorúan monoton nő**

1/f.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x > 0}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = 0}$ és $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$, melyek közül csak $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ felel meg ÉT-nek, tehát $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ **lehetséges szélsőérték hely**; **MONOTONITÁS:** $\left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ intervallumon $f'(x) < 0$, tehát **szigorúan monoton csökken**, $]0; \infty[$ intervallumon $f'(x) > 0$, tehát **szigorúan monoton nő**, $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ esetén $f'(x)$ előjelet vált, tehát **itt szélsőérték van**, **lokális minimum**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális minimum értéke** $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2e}}$

2/a.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x = 1}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték hely**; $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = 1}$ helyen $f''(1) = [(1)-2]\mathrm{e}^{-(1)} = \boldsymbol{-\frac{1}{e} < 0}$, ezért $\boldsymbol{x = 1}$ helyen **lokális maximum van**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális maximum értéke** $f(1) = (1)\mathrm{e}^{-(1)} = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$

2/b.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{6-6x^2}{(1+x^2)^2} = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = -1}$ és $\boldsymbol{x = 1}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték helyek**; $f''(x) = \frac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = -1}$ helyen $f''(-1) = \frac{12(-1)[(-1)^2-3]}{[1+(-1)^2]^3} = \boldsymbol{3 > 0}$, ezért $\boldsymbol{x = 1}$ helyen **lokális minimum van**, a helyettesítési érték $\boldsymbol{x = 1}$ helyen $f''(1) = \frac{12(1)[(1)^2-3]}{[1+(1)^2]^3} = \boldsymbol{-3 < 0}$, ezért $\boldsymbol{x = 1}$ helyen **lokális maximum van**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális minimum értéke** $f(-1) = \frac{6(-1)}{(-1)^2+1} = \boldsymbol{-3}$, a **lokális maximum értéke** $f(1) = \frac{6(1)}{(1)^2+1} = \boldsymbol{3}$

2/c.feladat: **ÉT:** $\frac{1}{x} > 0$, melyből $\boldsymbol{x > 0}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = x\left(2\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = 0}$ és $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$, melyek közül csak $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ felel meg ÉT-nek, tehát $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ **lehetséges szélsőérték hely**; $f''(x) = 2\ln\frac{1}{x} - 3$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ helyen $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2\ln\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)} - 3 = \boldsymbol{-2 < 0}$, ezért $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ helyen **lokális maximum van**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális maximum értéke** $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{2e}}$

2/d.feladat: **ÉT:** $x^2 + x - 2 \neq 0$, melyből $\boldsymbol{x \neq 1}$ és $\boldsymbol{x \neq -2}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x-2)^2} = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték hely**; $f''(x) = \frac{6(x^2+x+1)}{(x^2+x-2)^3}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ helyen $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right]^3} = \boldsymbol{-\frac{32}{81} < 0}$, ezért $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ helyen **lokális maximum van**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális maximum értéke** $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right]} = \boldsymbol{-\frac{4}{9}}$

2/e.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$ és $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték helyek**; $f''(x) = 2x(2x^2-3)\mathrm{e}^{-x^2}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$ helyen $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right]\mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{2e}} > 0}$, ezért $\boldsymbol{x = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$ helyen **lokális minimum van**, a helyettesítési érték $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ helyen $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right]\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{4}{\sqrt{2e}} < 0}$, ezért $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ helyen **lokális maximum van**; **SZÉLSŐÉRTÉKEK:** a **lokális minimum értéke** $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2e}}}$, a **lokális maximum értéke** $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2e}}}$

2/f.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x \neq 0}$; **SZÉLSŐÉRTÉKHELYEK:** $f'(x) = \frac{8x^3-1}{x^2} = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges szélsőérték hely**; $f''(x) = \frac{8x^3+2}{x^3}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ helyen $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^3+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \boldsymbol{24 > 0}$, ezért $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ helyen **lokális minimum van**;

SZÉLSŐÉRTÉKEK: a **lokális minimum értéke** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \boldsymbol{3}$

III.Feladat:

1/a.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x} = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x = 2}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pont**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $]-\infty; 2[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $]2; \infty[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $\boldsymbol{x = 2}$ esetén $f''(x)$ előjelet vált, tehát **itt inflexiós pont van**; **INFLEXIÓS PONT:** az **inflexiós pont függvényértéke** $f(2) = (2)\mathrm{e}^{-(2)} = \boldsymbol{\frac{2}{e^2}}$

1/b.feladat: **ÉT:** $\frac{1}{x} > 0$, melyből $\boldsymbol{x > 0}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = -\frac{1}{x} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen inflexiós pontja**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $f''(x) < 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért a függvény **mindenütt konkáv**

1/c.feladat: **ÉT:** $x + 1 \neq 0$, melyből $\boldsymbol{x \neq -1}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = \frac{40-8x}{(x+1)^4} = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x = 5}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pont**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $]-\infty; -1[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $]-1; 5[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $]5; \infty[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $\boldsymbol{x = 5}$ esetén $f''(x)$ előjelet vált, tehát **itt inflexiós pont van**; **INFLEXIÓS PONT:** az **inflexiós pont függvényértéke** $f(5) = \frac{4-4(5)}{[(5)+1]^2} = \boldsymbol{-\frac{4}{9}}$

1/d.feladat: **ÉT:** $x^2 - 1 \neq 0$, melyből $\boldsymbol{x \neq -1}$ és $\boldsymbol{x \neq 1}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen inflexiós pontja**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $]-\infty; -1[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $]-1; 1[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $]1; \infty[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**

1/e.feladat: **ÉT:** $x^2 + x - 2 \neq 0$, melyből $\boldsymbol{x \neq -2}$ és $\boldsymbol{x \neq 1}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = \frac{6(x^2+x+1)}{(x^2+x-2)^3} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen inflexiós pontja**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $]-\infty; -2[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $]-2; 1[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $]1; \infty[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**

1/f.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = 2x(2x^2 - 3)\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ és $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pontok**; **KONVEX-KONKÁV SZAKASZOK:** $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $\left]-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $\left]0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ intervallumon $f''(x) < 0$, tehát **konkáv**, $\left]\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty\right[$ intervallumon $f''(x) > 0$, tehát **konvex**, $\boldsymbol{x} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ esetén $f''(x)$ előjelet vált, tehát **itt inflexiós pontok vannak**; **INFLEXIÓS PONTOK:** az **inflexiós pontok függvényértéke** $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$ és $f(0) = (0)\mathrm{e}^{-(0)^2} = \mathbf{0}$ valamint $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2e^3}}$

2/a.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = (x+2)\mathrm{e}^x = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pont**; $f'''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2}$ helyen $f'''(-2) = [(-2)+3]\mathrm{e}^{(-2)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^2}} \neq \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2}$ helyen **inflexiós pont van**; **INFLEXIÓS PONT:** az **inflexiós pont függvényértéke** $f(-2) = (-2)\mathrm{e}^{(-2)} = -\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{e^2}}$

2/b.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = 0$, melynek nincs megoldása, ezért a függvénynek **nincsen inflexiós pontja**

2/c.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = 4\ln x + 6 = 0$, melynek megoldása $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{e^3}}}$, amely megfelel ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pont**; $f'''(x) = \frac{4}{x}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{e^3}}}$ helyen $f'''\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)} = \mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{e^3}} \neq \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{e^3}}}$ helyen **inflexiós pont van**; **INFLEXIÓS PONT:** az **inflexiós pont függvényértéke** $f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)^2 = -\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{e^3}}$

2/d.feladat: **ÉT:** $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$; **INFLEXIÓS PONT HELYE:** $f''(x) = \frac{2x^4-6}{x^4} = 0$, melynek megoldásai $\boldsymbol{x} = -\sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$ és $\boldsymbol{x} = \sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$, melyek megfelelnek ÉT-nek, tehát **lehetséges inflexiós pontok**; $f'''(x) = \frac{24}{x^5}$, melynek helyettesítési értéke $\boldsymbol{x} = -\sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$ helyen $f'''\left(-\sqrt[4]{3}\right) = \frac{24}{\left(-\sqrt[4]{3}\right)^5} = -\frac{\mathbf{24}}{\sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{243}}} \neq \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} = -\sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$ helyen **inflexiós pont van**, a helyettesítési érték $\boldsymbol{x} = \sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$ helyen $f'''\left(\sqrt[4]{3}\right) = \frac{24}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^5} = \frac{\mathbf{24}}{\sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{243}}} \neq \mathbf{0}$, ezért $\boldsymbol{x} = \sqrt[\mathbf{4}]{\mathbf{3}}$ helyen **inflexiós pont van**; **INFLEXIÓS PONT:** az **inflexiós pontok függvényértéke** $f\left(-\sqrt[4]{3}\right) = \frac{\left(-\sqrt[4]{3}\right)^4 - 1}{\left(-\sqrt[4]{3}\right)^2} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$, és $f\left(\sqrt[4]{3}\right) = \frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 - 1}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$